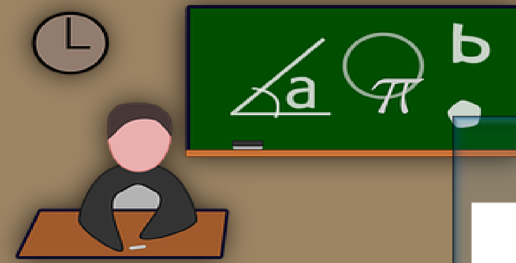
Dibujos y Trazos Geométricos



EL MENTOR DE MATEMÁTICAS

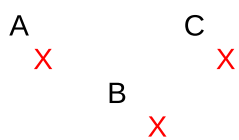
Aunque el sentido etimológico de la palabra geometría es “medida de la Tierra”, con el tiempo pasó a designar la parte de la matemática que se ocupa del tamaño, la configuración y la posición de los cuerpos en el plano o en el espacio.

20.1 VOCABULARIO BÁSICO DE LA GEOMETRÍA

Como otras ramas de la matemática, la geometría se desarrolla a partir de una serie de conceptos fundamentales. Los principales son el punto, la línea y el plano. Aunque su definición precisa es muy compleja, es posible dar ideas intuitivas bastante adecuadas para describirlos de forma sencilla.

Punto

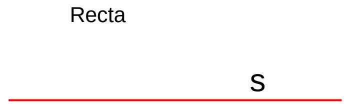
Es el concepto geométrico básico. Una minúscula mota de polvo o la señal que deja la punta de un lápiz sobre un papel ofrecen una idea aproximada de lo que es un punto. La intersección de dos pequeños trazos sirve para representarlo, si bien un punto matemático no tiene grosor. En el dibujo siguiente se representan tres puntos, que por lo general se denotan mediante letras mayúsculas, en este caso, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.



Línea

Un hilo delgado puede servir para hacerse una idea del concepto de línea. Al desplazar la punta de un lápiz, aunque la verdadera línea matemática no tiene grosor. Las líneas son ilimitadas en los dos sentidos en los que se pueden recorrer, y se denotan mediante letras minúsculas.

Si se imagina un hilo completamente tenso, se tiene una línea recta, o simplemente, una recta.

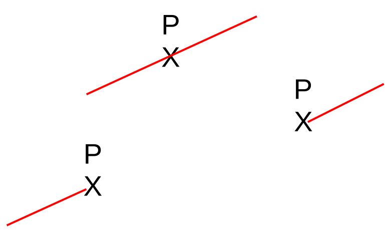


La intersección de dos rectas que se cruzan es un punto. Debido al hecho de que dos puntos dados de terminan una única recta, es posible indicar también una recta nombrando dos de sus puntos. Así, por ejemplo:

Se puede decir que es la recta *r*, o bien que la recta es *AB* o *BA*.

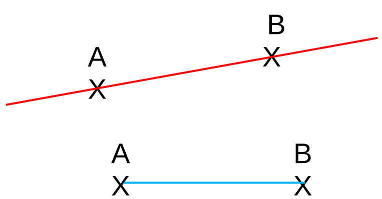
Semirrecta

Si se dibuja una recta y un punto P en ella, la recta queda dividida en os partes, cada una de las cuales se denomina semirrecta. El punto P se llama origen de las semirrectas



Segmento

Si se dibuja una recta y en ella se señalan dos puntos, A y B, el fragmento comprendido entre A y B es el segmento de extremos A y B.

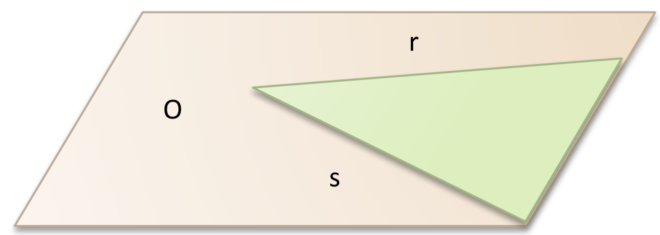


Plano

La superficie de una mesa o de una pizarra permite hacerse una idea del plano, que en geometría carece de grosor y es ilimitado en todas sus direcciones. La intersección de dos planos forma una línea recta.

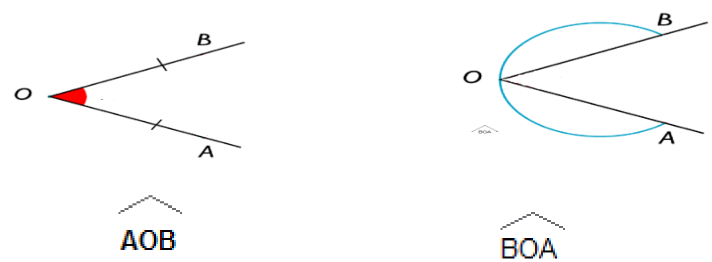
Ángulos

Si se dibujan en un plano dos semirrectas, r y s, con un mismo origen O, el plano queda dividido en dos partes, cada una de las cuales recibe el nombre de región angular o ángulo.

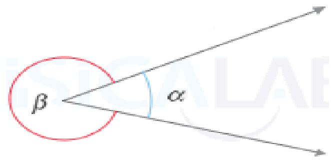


Las semirrectas *r* y *s* se llaman lados del ángulo, mientras que el punto O se designa como vértice del ángulo. Puesto que los lados son semirrectas y el plano se extiende sin fin en cualquier dirección, los ángulos son ilimitados.

Como dos semirrectas definen dos ángulos, para precisar de cual de ambos, se trata, se indica un punto de primer lado, el vértice y un punto del segundo lado, en este orden. En el siguiente esquema, a la izquierda se marca con un arco el Angulo interior AOB, y a la derecha se hace lo mismo con el ángulo exterior BOA:

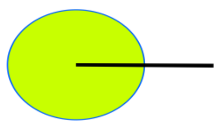


Los ángulos se pueden indicar mediante las letras del alfabeto (α, β, ɣ, etc.,), situadas en los dibujos junto a los arcos correspondientes, como en el siguiente esquema:



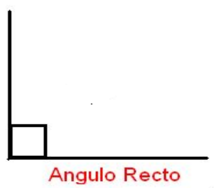
Existe una gran variedad de ángulos, de los que los más característicos son el ángulo nulo, el recto, el plano y el completo. Si las semirrectas r y s se superponen, se puede imaginar el plano dividido en dos ángulos uno interior sin abertura (**el ángulo nulo**) y el otro exterior, cuya abertura equivale a una vuelta completa (el **ángulo completo**):

Ángulo nulo

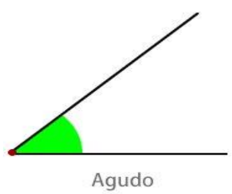


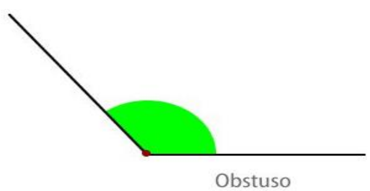
ángulo completo

Un **ángulo recto** equivale a una cuarta parte de uno competo. En lugar de con un arco, su abertura se suele dibujar con un cuadrado:

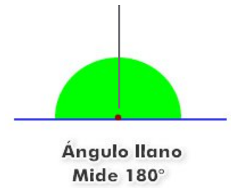


SI un ángulo mide menos que uno recto, se denomina **agudo**, y si mide más, **obtuso**:



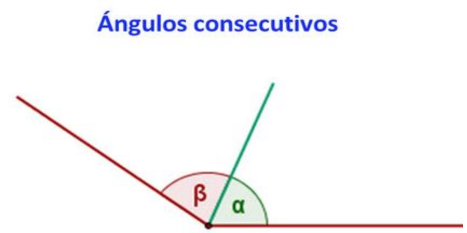


Por último, un **ángulo llano** equivale a dos rectos, o dicho de otra manera, a la mitad de uno completo:



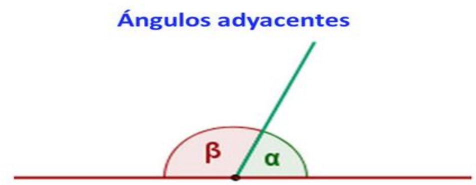
Ángulo consecutivo

Dos ángulos que tienen el vértice y un lado en común, como sucede con α y β en el siguiente dibujo, se llaman consecutivos:



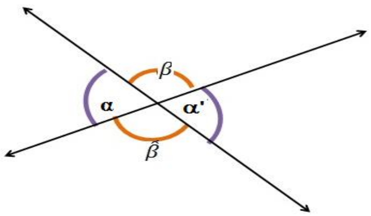
Ángulo adyacente

Si los lados no comunes de dos ángulos consecutivos sobre la misma recta, se llaman adyacentes. Como consecuencia, dos ángulos adyacentes, como α y β en el siguiente esquema, forman un ángulo plano.



Ángulo opuesto por el vértice

Dos ángulos con el vértice común y situados de tal forma que los lados de uno de ellos son prolongación de los lados del otro, se llaman opuestos por el vértice. A continuación, se dibujan dos pares de ángulos opuestos por el vértice, α y α' por un lado, y β y β' por otro:



Ángulos complementarios

Se dice dos ángulos son complementarios cuando su suma es igual a un recto, es decir, si colocados de forma consecutiva, forma un ángulo.

Ángulos Suplementarios

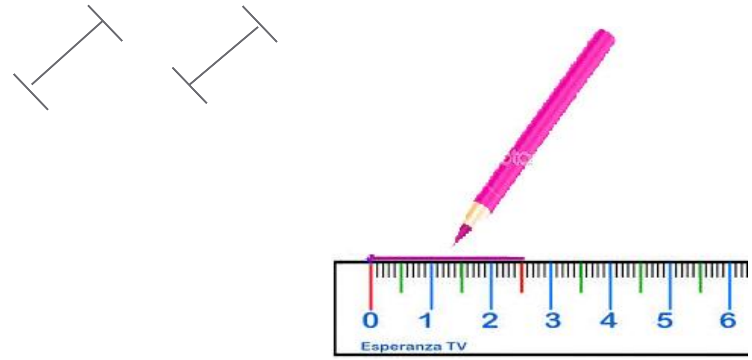
Dos ángulos son suplementarios cuando su suma es igual a dos rectos o, lo que es lo mismo, a un ángulo plano. Dos ángulos adyacentes son siempre suplementarios.

20.2 TRAZOS Y CONSTRUCCIÓN DE LAS FIGURAS BÁSICAS, PERPENDICULARES Y PARALELAS

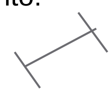
En geometría, es frecuente tener que construir, a partir de una línea dada, otra de igual longitud o que forme un ángulo recto con ella, con la ayuda de reglas, escuadras y compases. En este apartado se explica cómo debe procederse en cada caso.

Construcción de un segmento igual a otro

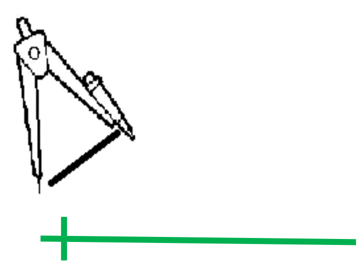
Los pasos que hay dar para construir un segmento igual a otro dado, con la ayuda de la regla y el compás, son los siguientes: con la regla, se traza primero una recta que tenga la orientación deseada:



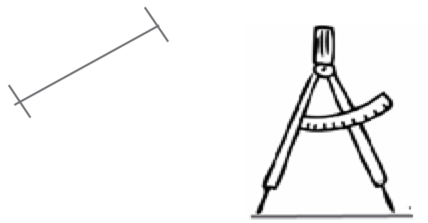
Se marca un punto en ella, que será uno de los extremos del nuevo segmento:



Se abre el compás, de manera que la distancia entre sus puntas sea igual a la longitud del segmento dado:



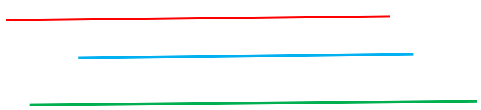
Por último, variar la abertura del compás, se sitúa una de las puntas sobre el punto marcado antes en la nueva recta, y con la otra punta del compás se marca el otro extremo:



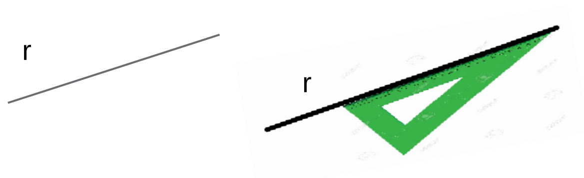
El segmento entre ambos extremos tendrá igual longitud que el lado.

Paralelo en el plano

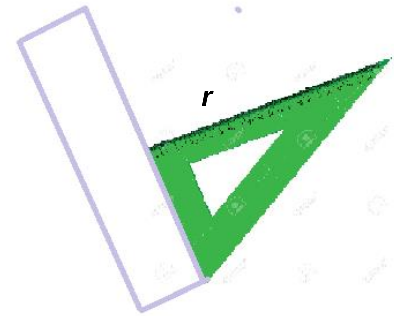
Dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto en común o cuando todos ellos coinciden. Si se trazan unas cuantas rectas paralelas, se observa que todas ellas tienen la misma dirección:



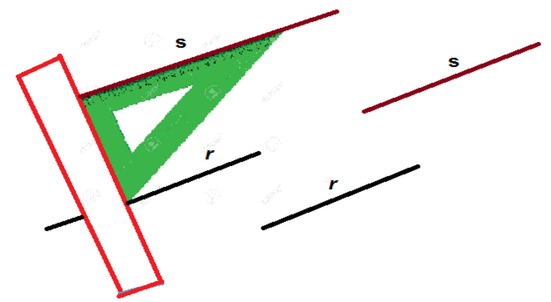
Para construir una recta paralela a una recta *r* conocida, con la ayuda de una regla y una escuadra, se siguen los siguientes pasos: en primer lugar, se alinea uno de los lados que forman ángulo recto con la recta dada *r*:



A continuación, se coloca la regla en el otro lado del ángulo recto de la escuadra:

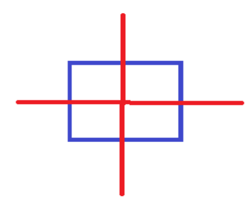


Por último, se desplaza la escuadra a lo largo de la regla, sin que ésta se mueva, y se traza la nueva recta s, que será paralela a ***r:***

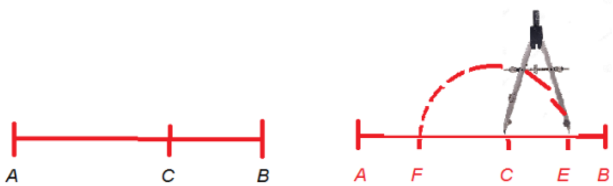


Perpendicular en el plano

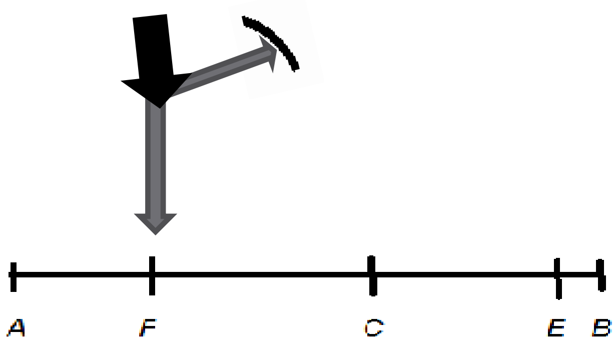
Dos rectas que se cortan dividen el plano en cuatro ángulos. Si los cuatro ángulos son rectos, se dice que las rectas son perpendiculares.



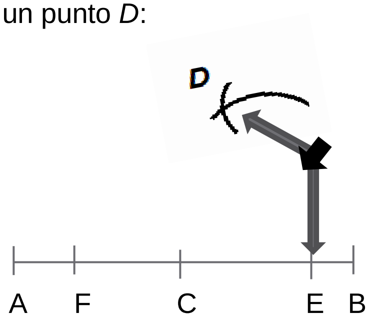
Para trazar una perpendicular a una recta *AB* dada, por un punto *C* de ésta, con una regla y un compás, se usa el siguiente procedimiento: primero, se sitúa la aguja del compás sobre el punto *C*, y se marcan los puntos *E* y *F*, a la misma distancia de *C*:



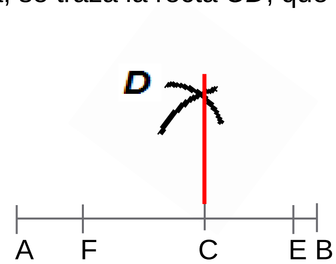
Luego, se sitúa la punta del compás sobre el punto F, y con una abertura del compás mayor que la distancia entre F y C, se marca un arco sobre C:



Se mantiene fija la abertura del compás, y se repite la operación anterior, pero esta vez desde el punto *E*, de maera que el nuevo arco corta al anterior en un punto *D*:

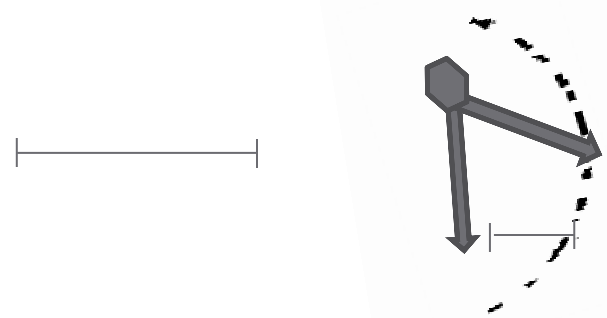


Con la regla, se traza la recta *CD*, que será perpendicular a *AB*:

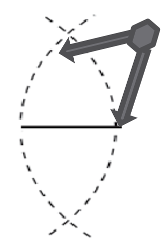


Mediatriz de un segmento

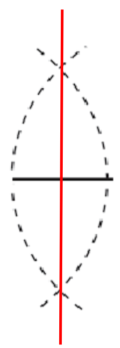
La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de dicho segmento, es decir, por el que lo divide en dos partes iguales. Para dibujarla con regla y compas, se coloca la punta del compás en una de los extremos del segmento haciendo que la apertura de este sea igual a la longitud del segmento. A continuación, se traza media conferencia:



Con la misma abertura, se procede de igual manera desde el otro extremo del segmento:



Uniendo los puntos resultantes de la intersección de las semicircunferencias, se obtiene la mediatriz buscada:



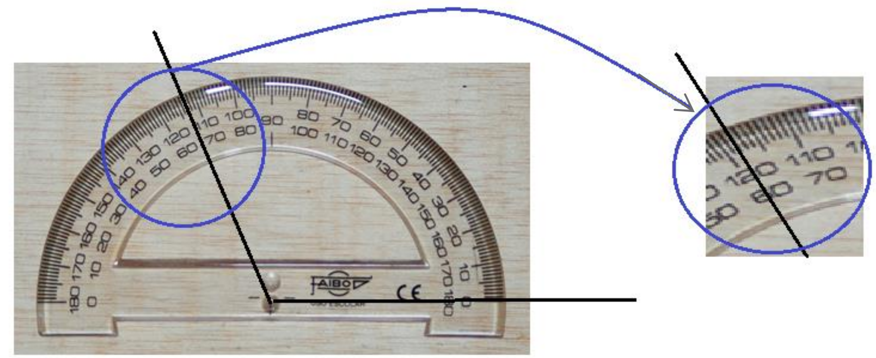
El punto de intersección entre el segmento y la mediatriz es el punto medio del segmento.

20.3 USO DEL TRANSPORTADOR PARA LA MEDICIÓN DE ÁNGULOS

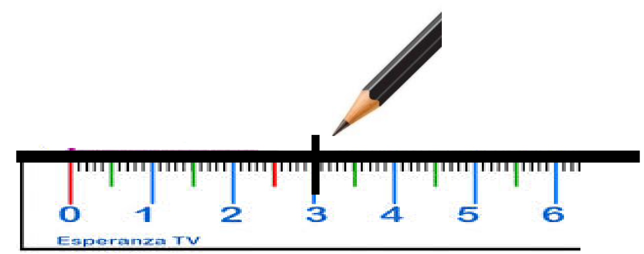
La unidad fundamental utilizada habitualmente para medir ángulos es el grado sexagesimal, que se obtiene al dividir un ángulo completo en 360 partes (ángulos) iguales. Los grados se indican mediante el símbolo (°).

Para medir ángulos, se utiliza un semicírculo graduado, denominado transportador, en el cual aparecen marcadas 180 partes iguales, cada una de las cuales equivale a un grado. Esto permite dibujar los diferentes ángulos a tenor de su apertura, indicada en grados. Conviene recordar que el ángulo nulo mide 0°, el recto equivale a 90°, el plano mide 180° y el completo vale 360°.

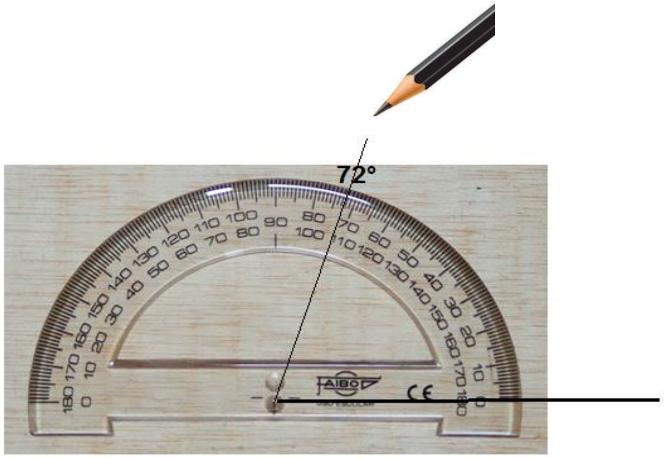
Para medir un ángulo, se hace coincidir su vértice con el centro del transportador, que suele estar señalado con un segmento sobre una línea que une las medidas de 0° y 180°. El primer lado del ángulo se hace coincidir con la semirrecta que une el centro y la división 0°, y el segundo lado del ángulo indica la medida angular sobre las marcas del transportador. En el siguiente dibujo se muestra la medición de un ángulo de 114° mediante el transportador:



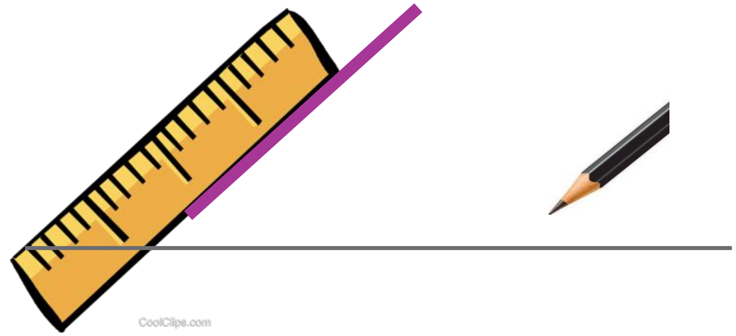
Para llevar a cabo la construcción de un ángulo que mida una cierta cantidad de grados, se procede de la siguiente forma: en primer lugar, se traza con una regla, en la que se señala el punto de origen del ángulo:



A continuación, se coloca el transportador de forma que su centro coincida con el punto de origen señalado, y se marca un punto en la posición de la medida deseada, en este ejemplo, de 72°



Para terminar, se une con la regla el origen del ángulo con el punto señalado mediante el transportador, con lo que se obtiene el ángulo deseado:



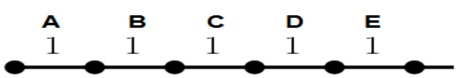
DIBUJOS Y TRAZOS GEOMÉTRICOS

VOCABULARIO BÁSICO DE LA GEOMETRÍA

EJERCICIOS COMENTADOS

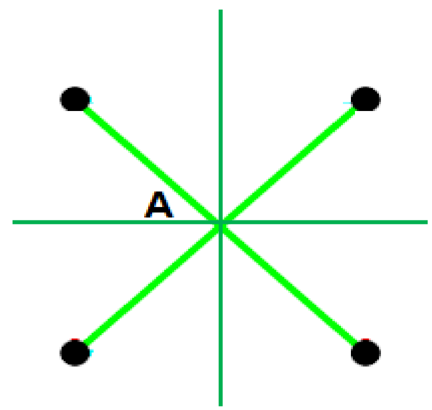
1 **Dibujar una recta, señalar cinco puntos y nombrarlos. ¿Por cuantos puntos está formada una recta?**

Si se dibuja una recta y se señalan cinco puntos, queda una representación como la siguiente:



Una recta está formada por infinitos puntos, ya que es ilimitada.

2 **Trazar un punto A. Dibujar cuatro rectas que pasen por A. ¿Se pueden dibujar más? ¿Cuántas?**

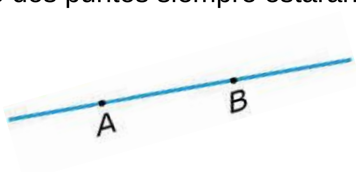


Se observa que se podrían dibujar tantas como se quisiera, de manera que se puede generalizar diciendo que, dado un punto **A**, por éste pasan infinitas rectas.

3 **Trazar dos puntos. ¿Están alimentados?**

Se dibujan dos puntos cualesquiera,

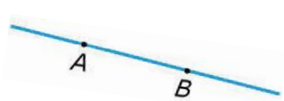
Se observa que se pueden unir mediante una recta. Como pertenecen a una misma recta, se dice que están alineados. Esto es un hecho general: dos puntos siempre determinan una recta, por lo que dos puntos siempre estarán alineados



4 **Dibujar dos rectas con dos puntos en común. ¿Cómo son estas rectas?**

Se supone que los puntos comunes son A y B, representados en el libro:

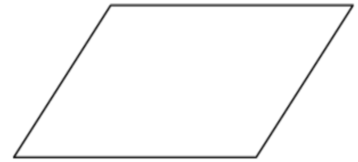
Se quiere trazar dos rectas distintas que pasen por A y B, pero se sabe que sólo hay una recta que pase por dos puntos dados. En consecuencia, las dos rectas deben ser la misma y, por consiguiente, no solo tendrán dos puntos en común, sino que todos los puntos que las forman serán comunes.



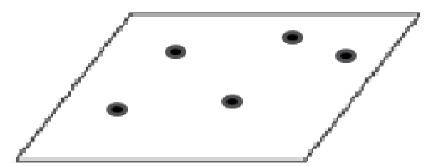
5 **¿Qué objetos de uso común pueden sugerir los conceptos de línea recta y de plano?**

Por ejemplo, la línea de la cuadrícula de un cuaderno, el borde de la ventana o el borde de la puerta, dan idea de línea recta. La idea de plano la transmite, por ejemplo, la superficie de una mesa, la de una puerta o una pared.

6 **Un plano se puede representar mediante un paralelogramo:**



Dado éste, señalar cinco puntos en él. ¿Por cuántos puntos está formado un plano?



7 ***A* y *B* son dos puntos distintos en el plano. Trazar las semirrectas con origen en cada uno de estos puntos y que pasan por el otro. ¿Cuál es la intersección de estas dos semirrectas?**

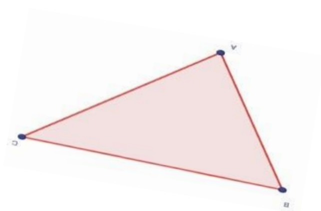
En primer lugar, se dibujan dos puntos distintos en el plano y, con origen en A y pasando por B, se traza la semirrecta:

Ahora se dibuja la semirrecta de origen *B* que pasa por *A*:

Tal como se puede apreciar en el dibujo, la intersección de las dos semirrectas dibujadas es el segmento de extremo *A y B*

8 **Dibujar tres puntos no alineados. Trazar todos los segmentos posibles con extremos en estos puntos. ¿Cuántos hay?**

Si se dibujan tres puntos no alineados y a continuación se trazan todos los segmentos posibles se obtiene la figura siguiente:



En este caso, se pueden dibujar tantos segmentos como punto hay, es decir, tres.

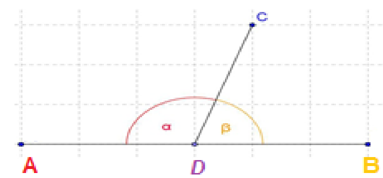
9 **Dibujar un ángulo que tenga sus dos lados sobre la misma recta.**

Es sabido que un ángulo es la región que determinan dos semirrectas con origen común, que son los lados del ángulo. Dado que el enunciado dice que estos lados deben coincidir, la única posibilidad es que ambos lados se sitúan sobre la misma semirrecta. esto se puede dibujar del siguiente modo:

El dibujo se puede interpretar como dos ángulos diferentes: un ángulo nulo o un ángulo competo.

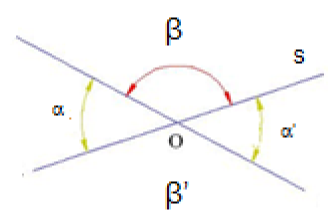
10 **Trazar dos ángulos adyacentes iguales.**

Dos ángulos adyacentes iguales no pueden ser más que rectos. Por tanto, la solución viene dada por el siguiente dibujo:

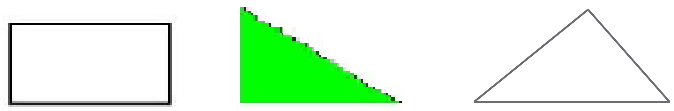


11 **Dibujar dos ángulos con vértice común, de manera que los dados de una de ellos sean la prolongación de los lados del otro.**

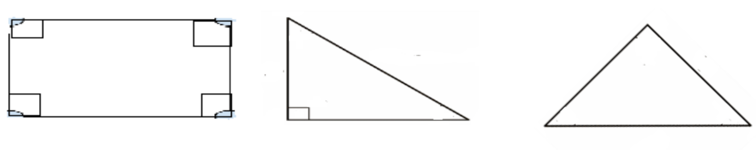
La situación descrita en los enunciados en el enunciado es la de dos ángulos opuestos por el vértice. En el dibujo siguiente se observan dos pares, los ángulos α y α' por una parte, y β y β' por otra:



12 Señalar el vértice de los ángulos rectos que hay en las Siguientes figuras:

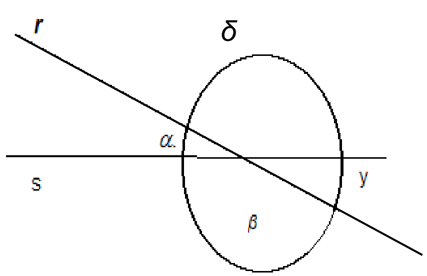


La figura central no tiene ningún ángulo recto, Los de las otras figuras se señalan mediante un cuadradito colocado en el vértice:



13 **Dos rectas que se cortan en un punto, ¿en cuántos ángulos dividen el plano?**

Trazadas dos rectas que se cortan en un punto, se observa que el plano, representado aquí por la hoja del libro, queda dividido en cuatro ángulos: δ, γ, β, α.



14 **Completar la siguiente tabla:**

Ángulo	61,8°	35,6°			
Complementario			46,4°	76,2°	
Suplementario					102,5°

Recordando que el complementario de unos ángulos es el que, sumando al inicial, forma un ángulo de 90° y que, por otro lado, el suplementario es el ángulo que sumado al inicial forma un ángulo de 180°, la tabla se completa del siguiente modo:

Ángulo	61,8°	35,6°	43,6°	13,8°	77,5°
Complementario	28,2°	54,4°	46,4°	76,2°	12,5°
Suplementario	118,2°	144,4°	136,4°	166,2°	102,5°

15 **Tres ángulos de un conjunto de cuatro ángulos consecutivos y adyacentes valen, respectivamente, 15°, 20° y 37°. ¿Cuánto valdrá el cuarto y el último ángulo?**

Dado que la suma de los tres vale 15° + 20° + 37° =
= 72° y recordando que la suma de los ángulos adyacentes vale dos rectos, o sea 90°. 2 = 180°, el cuarto y último ángulo valdrá ángulo valdrá 180° - 72° = 108°.

: La medición de las distancias, es decir, la determinación de longitudes, el cálculo de áreas, o sea la obtentación de superficies, y el manejo de espacios, es decir, las operaciones con volumenes, requieren de la utilización de unidades adecuadas. Las que se comentan a continuación corresponden al sistema métrico decimal, el más extendido en la actualidad.

21.1

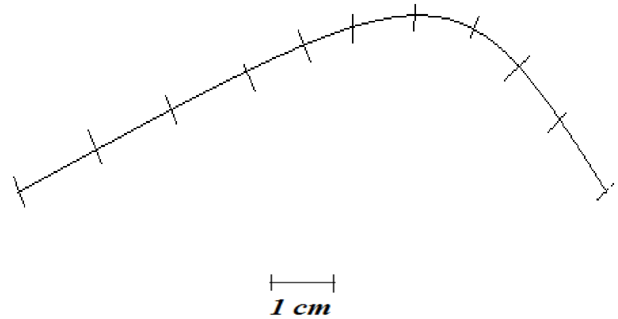
UNIDADES PARA MEDIR LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

La medida de una línea: su longitud

Una cuerda puede ayudar a pensar en una línea: si la cuerda esta tirante, dibujara muy aproximadamente una línea recta, que se puede imaginar ilimitada, sin principio ni fin. Si se marca un punto en una recta, ésta queda dividida en dos semirrectas, una a cada lado del punto. Si se marcan dos puntos, el fragmento de recta que queda limitado por ellos en un segmento.

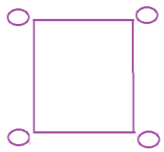
Desde los albores de la civilización, el ser humano ha tenido la necesidad de cuantificar las cosas, es decir, de medir y pesar. Esta actividad se ha convertido a lo largo del tiempo en una práctica cotidiana y vital que arranca de las culturas Babilonia y egipcia y llega hasta nuestros días. Este cuadro del siglo XVII, atribuido al holandés Hendrik Van Balen, conocido como Las medidores, ilustra la conocida Máxima del poeta romano Horario: "Hay una medida en todas las cosas".

Considérese un segmento de una línea cualquiera, no hace falta que sea recta. Cuando se trata de medirlo, se parte de la suposición de que es limitado, ya que de lo contrario no se podría medir. Para empezar, se toma como unidad otro segmento bien determinado, por ejemplo, un segmento llamado «centímetro». Se supone que el centímetro es flexible y que puede adaptarse al contorno de cualquier línea. Se procede a colocar el centímetro con jun extremo sobre el del segmento que se quiere medir y se marca el punto al que llega el otro; se toma este último como origen de una nueva superposición, y se repite el procedimiento dos, tres, cuatro veces, etc., hasta que se llega al final. Si se cuenta las veces que se ha superpuesto el centímetro sobre el segmento que se quiere medir, éste es el número que designa la longitud del segmento medido respecto de la unidad escogida.



El Estanque y los Árboles

La señora Flores tiene un estanque cuadrado en su jardín. En su momento, hizo plantar cuatro árboles, uno junto a cada vértice.



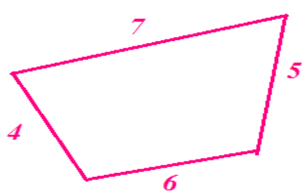
Decide ahora aumentar la superficie del estanque al doble, pero no quiere cortar los árboles, ni cambiarlos de lugar, ni que quede en islas dentro del estanque ¿Cómo se pueden cumplir los deseos de la señora Flores?

En la figura se observa que la unidad elegida se puede colocar encima del segmento 7 veces. Así, se puede decir que su longitud es de 7 cm. De forma general, la longitud de un segmento es el número de veces que contiene a otro que se forma como unidad, como el centímetro del ejemplo.

Las medidas longitudinales cumplen las siguientes propiedades:

- A mayor longitud corresponde mayor medida.
- La longitud de un segmento formado por la unión de otros es la suma de las longitudes de los segmentos que lo forman.

Una vez que se conoce el procedimiento de medida de longitudes, se puede medir, en principio, cualquier tipo de segmentó, como el contorno de figuras planas formadas por la unión de varios segmentos. Supóngase que se tiene la siguiente figura:



Está formada por la unión de cuatro segmento de longitud 7, 5, 6 y 4. Si se suman dichas longitudes, se obtendrá otro número, en este caso 7 + 5 + 6 + 4=22. Este valor, resultado de sumar las longitudes de los cuatro lados, recibe el nombre de **perímetro**. De esta manera se pueden obtener, de modo general, los perímetros de todas las figuras, ya tengan 3, 4, 5 o un número superior de lados.

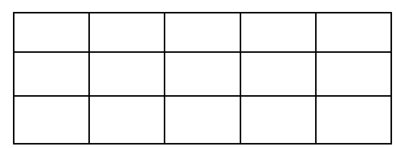
La medida de una superficie: su área

Para tener una imagen del concepto de área, se puede utilizar la cara superior de un papel, cuya superficie es plana. Si se imagina una superficie plana sin límites y sin bordes, se estará pensando en un aplano infinito.

Si en un plano se dibuja un conjunto de líneas unidas formando una figura cerrada, el plano queda dividido en dos partes: la superficie comprenda dentro de la figura y la que queda fuera de ésta, El fragmento de plano que queda dentro de la figura está limitado y es posible medir su superficie, es decir, saber cómo es de grande. Una vez se sabe cómo medir superficies comprendidas enre líneas, de forma general, se podrá medir la superficie, o lo que es lo mismo, el área, de un gran número de figura geométrica distintas.

Como en el caso de la longitud, en la medida de superficie debe considerarse una unidad de medida. Para medir áreas, se toma como unidad de medida una superficie acotada bien definida: una unidad adecuada para el dibujo es un centímetro cuadrado, es decir, un cuadrado cuyos lados mide 1cm de longitud. Para medir superficies, resulta útil disponer de una cuadrícula formada por una retícula de centímetros cuadrados. La medida de una superficie dibujada en la cuadrícula será el número de cuadraditos que contenga.

Si se considera de esta manera la superficie de la figura siguiente:



¿Cuántos cuadritos caben en ella? Se ve con claridad que caben 18 cuadritos; en consecuencia, se dice que su área es de 18 centímetros cuadrados, que también puede escribirse 18 cm^2.

De forma general, el área de una superficie es el número de veces que contiene a una superficie definida que se toma como unidad, como puede ser el centímetro cuadrado.

El Sistema métrico decimal

Para medir longitudes y superficies, conviene a emplear un sistema de unidades homogéneas. Lo más común es utilizar el sistema métrico decimal, en que para medir longitudes, la unidad principal es el metro. Un metro (1 m) es una unidad de longitud cuyo tamaño está definido con gran precisión por la oficina Internacional de Pesas y Medidas, con sede en Sevre (Francia), organismo internacional que se ocupa de establecer las distintas unidades de medidas usadas por la comunidad científica. Si se quisiera dar una vuelta alrededor del mundo, se tendrán que recorrer, aproximadamente, 40 millones de metros.

Para medir longitudes reducidas, es útil emplear submúltiplos del metro: el decímetro (dm), que es la décima parte del metro: el centímetro (cm) y el milímetro (mm). Cada una de ellas es la décima parte de la anterior. Para medir longitudes mayores, se usan múltiplos del metro: el decámetro (dam), que equivale a 10 m, el hectómetro (hm) y el kilómetro (km). En el orden citado, cada una es 10 veces mayor que la anterior. Por orden de mayor a menor, se distribuyen de la siguiente manera:

kilómetro	Km
hectómetro	hm
decámetro	dam
METRO	m
decímetro	dm
centímetro	cm
milímetro	mm

Una misma longitud se puede expresar con las distintas unidades de medida presentadas. Por ejemplo, 9, 375619 km = 9km, 3 hm, 7 dam, 5 m, 6 dm, 1 cm y 9 mm. De la misma forma, 32,659 m = 3 dam, 2 m, 6 dm, 5 cm y 9 mm.

Para medir superficies, como por ejemplo la extensión de un campo o las paredes de una habitación, en el sistema métrico decimal se toma como unidad básica el metro cuadrado (m^2) , definido como el área de un cuadrado cuyos lados miden 1 m.

Para medir superficies pequeñas, es cómodo emplear los submúltiplos del metro cuadrado: el decímetro cuadrado (cm^2) y el milímetro cuadrado (mm^2). Cada uno de ellas es la centésima parte de la anterior: así, 1 m^2 es igual a 100 dm^2. Para medir superficies más extensas, se suelen utilizar los múltiplos del metro cuadrado: el decámetro cuadrado (dam^2), el hectómetro cuadrado (km^2). En el mismo orden, cada uno de ellos es 100 veces mayor que el anterior. Por orden de mayor a menor, la serie de las unidades de medida de área es:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

La medida de una superficie también se puede expresar con distintas unidades. Así,

15 km^2, 24 dam^2, 7 m^2, 8 dm^2 y 32 cm^2 = 15 002 407,0832 cm^2

La medida de un espacio: su volumen.

Para medir el volumen de un cuerpo, es decir, la porción del espacio tridimensional que ocupa, se toma como unidad básica el **metro cúbico** (m^3). Un metro cúbico es el volumen de un cubo cuyas caras son cuadrados 1 m de lado, Como en los casos de las unidades de longitud y de superficie, existen múltiplos y submúltiplos del metro cúbico: el kilometro (km^3), el hectómetro (hm^3) y el decámetro (dm^3), el centímetro (cm^3) y el milímetro (mm^3) cúbico, entre los submúltiplos. La serie, ordenada de mayor a menor, es como sigue:

kilómetro cúbico	km3
hectómetro cúbico	hm3
decámetro cúbico	dam3
metro cúbico	m3
decímetro cúbico	dm3
centímetro cúbico	cm3
milímetro cúbico	mm3

21.2 DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE FIGURAS DIBUJADAS SOBRE PAPEL CUADRICULADO O MILIMETRADO. DEDUCCIÓN DE ÁREAS DE DIFERENTES FIGURAS PLANAS

Para calcular el área de las figuras geométricas más comunes (cuadrados, rectángulos, triángulos, etc.) se utilizan distintas fórmulas matemáticas, como, por ejemplo, multiplicar la base por la altura en el caso del rectángulo. Todas estas fórmulas se basan en la descomposición de la figura a la que se aplican en cuadrados unitarios iguales, cuyo lado puede ser de un metro, un decímetro u otra unidad, según convenga.

En el caso del rectángulo, la descomposición de su área se consigue transportado a sus lados la unidad.

CUADRADO INSCRITO

Construir un triángulo ABC: Inscribir en él un cuadrado, de modo que sus cuatro vértices pueden sobre los lados del triángulo.

JUEGO

CERRANDO CUADRADOS

Este juego de lápiz y papel es muy popular entre los estudiantes de diferentes países del mundo. Se suele jugar entre dos contrincantes, aunque en realidad pueden jugar más de dos. El único material necesario es papel cuadricula y lápiz.

Mecánica del Juego

A	A	B	B	B
A	B	B	B	B
B	B	A	A	A
A	A	A	A	A
B	B	A	A	A

Se señala sobre la cuadrícula un área, de cualquier tamaño y forma. En su turno, cada jugador marca un lado de un cuadradito del cuadriculado. En caso de que un jugador consiga cerrar un cuadrado unitario (caja), coloca en su interior una inicial o un símbolo que lo identifique como propio, y además gana un turno extra. Si con un único trazo se cierran dos cuadrados, se anota la inicial en ambos, pero se gana un único turno extra. Si con un único trazo se cierran dos cuadrados, se anota la inicial en ambos, pero se gana un único turno extra.

La partida finaliza cuando todos los cuadraditos tienen una inicial en su interior. Gana quien ha logrado cerrar mayor cantidad de ellos. El grafico de la derecha, arriba, muestra una partida terminada, ganada por **A**:

Algunas estrategias

Pese a su mecánica simple, el juego encierra una gran complejidad. El matemático Elwyn Berlekaamp, de la Universidad de California en Berkeley, conoció el juego cuando era niño; con el tiempo se ha dedicado a estudiarlo y ha publicado un libro acerca de las estrategias para jugarlo.

Una táctica básica consiste en evitar, si es posible, colocar el tercer lado de un cuadrado. Si ambos jugadores mantienen esta táctica, se forma una especie de laberintos, y llega un momento en que es forzoso cerrar cajas. Esto genera encadenamientos de cajas, situación en la que es recomendable no ser codiciosos; en ocasiones conviene detener el encadenamiento y evitar que quede una situación favorable para el otro jugador. En el gráfico de la derecha de estas lianas se muestra la fase final de una partida: es el turno de **A**, y se indica en rojo la última que ha realizado **B**:

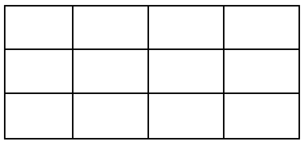
El jugador **A** podría marcar todos los cuadrados sombreados, pero perdería la partida, al otorgar a **B** los restantes cuadrados libres. En cambio, puede interrumpir el encantamiento y colocar la última línea en la posición marcada en rojo en siguiente gráfico:

A	A	B	B	B
A	B	B	B	B
B	B	A	A	A
A	A	A		

De este modo, sea cual sea la jugada de **B**, **A** ganará la partida:

A	A	B	B	B
A	B	B	B	B
B	B	A	A	A
A	A	A	A	A
B	B	A	A	A

de medida tomada. Sí, por ejemplo, un lado contiene exactamente 4 veces un centímetro y el otro lado tres veces, el rectángulo quedará descompuesto en 3 x4=12 cuadrados, como sucede en la figura siguiente:



Por eso, el área (A) del rectángulo será A= 3 x 4 cm = 12 cm^2. Por ello, se establece que el área del rectángulo viene dada por el producto de dos de sus lados de longitud diferente. La fórmula general para todo rectángulo es:

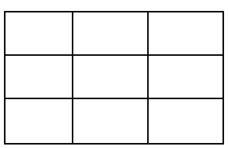
$$A = a \cdot b$$

Donde a y b con las longitudes de dos lados distintos. Por regla general, con a se denota la altura del rectángulo, y con b, su base.

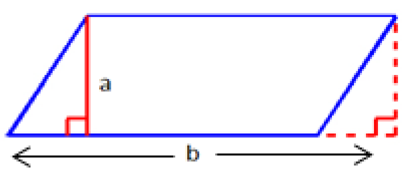
De forma similar, se pueden obtener las fórmulas del área de otras figuras geométricas. Cómo muestra, se puede ver como deducir la fórmula del área del cuadrado. Un cuadrado es un rectángulo con los 4 lados iguales; por lo tanto, utilizando la fórmula anterior, se tiene que:

$$A = a \cdot b = 1 \cdot 1 = 1^2$$

Donde 1 denota la longitud de cualquiera de los lados.



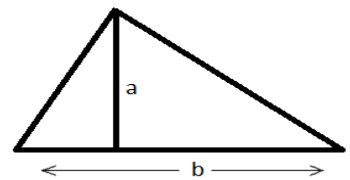
Veamos ahora cómo calcular el área del romboide:

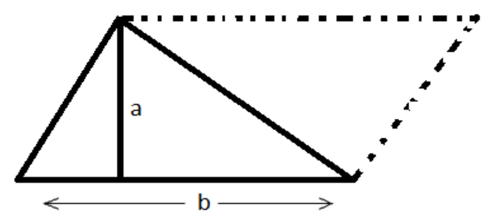


Se observa que el área es la misma que la del rectángulo que mide a de altura y b de base. Así:

$$A = a \cdot b$$

En el caso de un triángulo, como el que se ve en la figura siguiente:

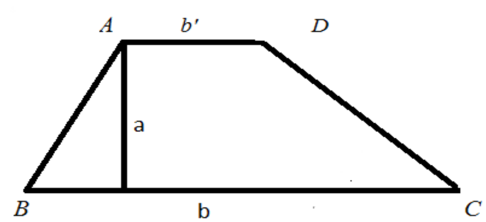


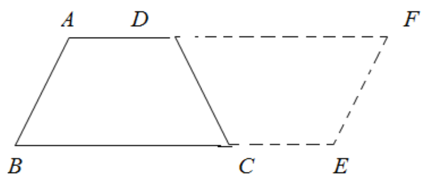


En el segundo dibujo se aprecia que el área del triángulo es la mitad que la del romboide de base b y altura a. Como consecuencia, se tiene que:

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

Veamos ahora cómo calcular el área del trapecio:

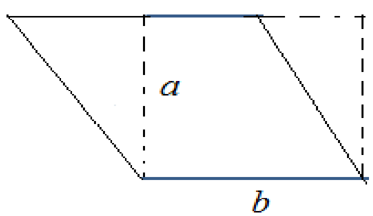




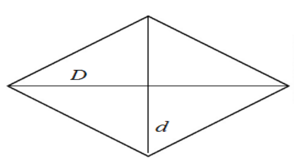
En la figura anterior se observa cómo se ha prolongado el segmento *BC*, al añadirle el segmento *CE*, que tiene la misma longitud que *b'*. De la misma manera, se ha prolongado el segmento AD con el segmento DF, de igual medida que el segmento BC, es decir, de medida *b*. Así, se observa que el área del trapecio es la mitad que la del paralelogramo resultante de prolongar los lados *b* y *b'* de modo que la base del paralelogramo sea la suma de las bases del paralelogramo sea la suma de las bases del trapecio, *b* y *b'*, siendo su altura *a* la misma. Por lo tanto, el área A será:

$$A = \frac{b+b'}{2}a$$

Finalmente, véase cómo calcular el área del rombo. Se sabe que el rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales, paralelos dos a dos y que sus diagonales son perpendiculares. Su área puede expresarse como base (*b*) por altura (*a*):



Pero también se puede decir que su superficie es la mitad de la de un rectángulo que tuviera como base y altura las diagonales del rumbo.



Por lo tanto, se concluye que el área del rombo es:

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

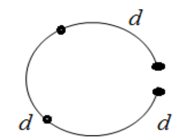
Donde d y D son la diagonal menor y mayor, respectivamente

Una vez se sabe calcular el área rectángulo, del cuadrado, del trapecio y del rombo, se podrán calcular las áreas de un gran número de figuras más complejas, formadas por la unión de varias de las figuras mencionadas.

Conocimiento y aplicación de las fórmulas para calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo, numero π

21.3 Una circunferencia es una curva cerrada y plana, cuyos puntos se encuentran todos a la misma distancia de otro punto interior, llamado centro. La circunferencia encierra en su interior una porción de paño conocida como **círculo**.

Para calcular la longitud de una circunferencia, se considera un segmento que mida lo mismo que el diámetro (*d*) de la circunferencia, es decir, cuya longitud sea igual a la de un hilo recto que unos dos puntos distintos de la circunferencia, pasando por su centro. Si se lleva el hilo, una y otra vez, a lo largo de la circunferencia, se sabrá cuantas veces contiene la circunferencia a su diámetro.



El número de veces que una circunferencia cualquiera contiene a su diámetro es, aproximadamente, 3,14. Éste número se conoce como número π (pi).

Si se quiere conocer la longitud (L) de una circunferencia y se conoce la de su diámetro (d), no se tiene que hacer nada más que multiplicar la longitud del diámetro por pi:

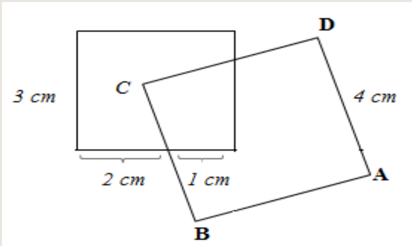
$$L = \pi d$$

Si la longitud que se conoce en la del **radio** *(r)*, es decir, la del segmento que une un punto de la circunferencia con el centro, se tendrá que multiplicar por 2 para obtener el diámetro, luego por pi, y así se logra la longitud de la circunferencia:

$L = 2\pi\, r$

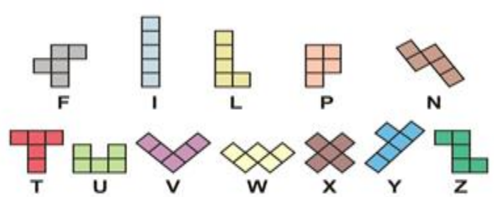
CUADRADOS SUPERPUESTOS

El vértice C del cuadrado mayor coincide con el centro del menor. El lado BC (lo mismo que el lado DC) corta el lado del cuadrado menor a un tercio del total. ¿Cuál es la superficie en que se suponen?



JUEGO PENTOMINÓS

Los Pentominós son figuras formadas con 5 cuadrados del igual tamaño, unidos por lados completos. Dicho de otro modo, son confirmaciones que cubren cinco cuadrados adyacentes de un tablero de ajedrez. En total, existen doce Pentominós diferentes. Se nombran según sus formas, que recuerda las de algunas letras.



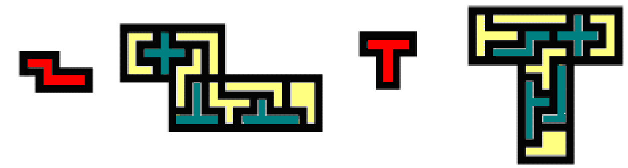
Regla minimotécnica FILPN (FiLiPiNo) y TUVWXYZ (últimas letras del alfabeto)

Es sencillo fabricar un juego de Pentominós: basta con dibujar las piezas en un papel cuadriculado, pegarlas sobre cartón y luego recortarlas.

Existe una enorme cantidad de juegos para realizar con Pentominós. Presentamos dos desafíos:

Agrandar Pentominós

Cualquiera de los Pentominós puede ser construido triplicando su tamaño con ocho de los Pentominós restante. Se muestran dos ejemplos, para el P y el T. Se invita a encontrar alguna de las múltiples soluciones de los demás



Rectángulo con Pentominós

Los doce Pentominós cubren una superficie de 60 cuadrados unitarios. Los diferentes tableros rectangulares de 60 cuadros son de 1 x 60, 2 x 30, 3 x 20, 4 x 15, 5 x 12 y 6 x 10. Por razones obvias, los rectángulos de 1 x 60 y 2 x 30 no pueden ser recubiertos con Pentominós. En contra de lo que podría parecer, el rectángulo de 3 x 20 puede ser resuelto, pero es sin duda el más difícil, pues tiene solo dos soluciones. El número de soluciones diferentes para los destinos rectángulos se muestra en la tabla de la derecha:

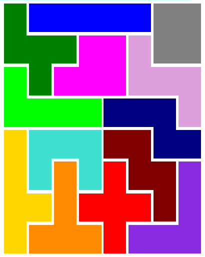
Dimensiones	N° de soluciones
3 x 20	2
4 x 15	368
5 x 12	1010
6 x 10	2 339

Los desafíos

a) Construir a la vez, con un solo juego de pentominós, un rectángulo de 3 x 5 y otros de 5 x 9.

b) Con los pentominós I, N, T, V, W, Y y Z, construir un rectángulo de 5 x 7, con los 5 restantes, construir un cuadrado de 5 x 5.

c) A la derecha se muestra un rectángulo de 5 x 6.



Con los otros pentominós del juego, construir otro rectángulo de igual medida

d) Construir, cada vez con todos los pentominós de un juego, uno de los posibles rectángulos de 4 x 15, luego uno de 5 x 12, y finalmente de 6 x10.

Para calcular el área del círculo, se parte del conocimiento de que su área equivale a la del número de unidades de superficie que puede contener. Pero, si se conoce la longitud del radio, hay una forma más rápida de saber ese número de cuadritos, es decir, el área (A). La fórmula es la siguiente:

$A = \pi\, r^2$

El número pi es la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, es decir, no existe ninguna fracción que de exactamente su valor y aunque se conocen varios millones de sus infinitas cifras decimales, para la mayoría de los cálculos es suficiente tomar como valor aproximado el de 3, 14.

21.4 PRÁCTICA DEL DIBUJO A ESCALA

Observación del efecto de una reducción o ampliación a escala sobre las dimensiones lineales, el área y el volumen.

Se dice que un dibujo está hecho a escala cuando se ha realizado respetando las proporciones de su modelo, es decir, que aunque cada una de sus magnitudes haya variado de tamaño, la relación entre ellas se ha mantenido invariable.

Si todas las longitudes (líneas, distancias) se han multiplicado, por ejemplo, por 3, el dibujo se habrá hecho a escala 3 (que en nomenclatura técnica se expresa con la forma 3:1). Si todas las longitudes del modelo se han multiplicado, por ejemplo, por $\frac{1}{4}$ (lo cual significa que se han dividido por 4), el dibujo se habrá hecho a escala $\frac{1}{4}$ (lo que se escribe también como 1:4).

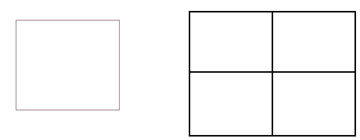
EL NÚMERO PI EN LA BIBLIA

El libro de reyes (7,23) dice: ≪ Después hizo un depósito de bronce fundido. De forma redonda, medía diez codos de un extremo a otro y cinco codos de profundidad. Tenía treinta codos de perímetro≫. Parece claro que los instrumentos de medida de los israelitas no eran muy precisos.

¿Cuál es el valor de π que se deduce de ese versículo de la Biblia?

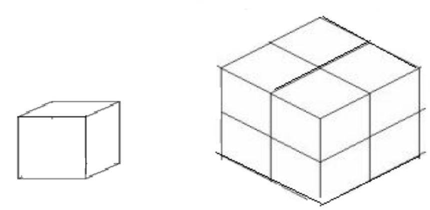
Si la primera cifra de la escala es mayor que la unidad, el dibujo resulta más grande que el modelo, mientras que si es menor, el dibujo reproduce el modelo de forma reducida. Si un dibujo está hecho a escala 1:1, será exactamente igual que el modelo, tanto en la forma como en el tamaño.

Imaginemos ahora que se tiene un cuadrado como el de la figura, y se quiere reproducir a escala 2:1



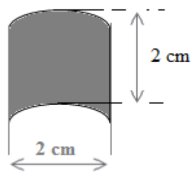
Cualquier longitud del cuadrado mayor representado a su derecha es el doble de la que le corresponde en el menor. Sin embargo, la superficie del mayor no es 2 veces la del menor, sino 4 veces la de éste, y se puede comprobar al notar que es posible trasladar el cuadrado menor cuatro veces sobre el mayor.

Cuando se trata de un cuerpo tridimensional representado a escala, sucede algo similar con los volúmenes. En la figura siguiente se tiene un cubo, y su reproducción a escala 2:1 a su derecha.



La Ventana

Se necesita conocer la superficie de una ventana que tiene la forma de la figura. Se dispone solamente de los datos indicados. ¿Es posible calcular dicha superficie?



Las longitudes del mayor son 2 veces las del menor; las superficies (por ejemplo, las de las caras) son 4 veces mayores, y el volumen es 8 veces mayor. Si, en lugar de multiplicar las longitudes por 2, se multiplican por 3, las superficies se hacen 9 veces mayores, como consecuencia de lo cual, los volúmenes resultan entonces 27 veces los originales. En general, puede decirse que si la **razón de semejanza** es *K*, o lo que es lo mismo, si lo que aumentarnos la figura es *k*, las longitudes quedan multiplicadas por *k*, las áreas, por k^2 y los volúmenes, por k^3.

Invariancia de ángulos

Tanto si se hace el dibujo a escala para aumentar como para disminuir las dimensiones del modelo original, los ángulos permanecen sin variación: pueden cambiar las longitudes de los lados que los forma, pero no el grado de su apertura. Por este motivo, se dice que los ángulos son invariantes en la representación a escala. Se ha de tener en cuenta respetar esta propiedad cuando se realizan dibujos a escalas de modelos dados.

EL NÚMERO PI

El número pi es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, es decir, que no existe ninguna fracción que dé exactamente su valor. Aunque se han calculado varios millones de decimales de pi, para la mayoría de los cálculos prácticos es suficiente con considerar dos o tres cifras decimales. Indicado hasta el décimo decimal, el número pi es:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

Las primeras cavilaciones indoeuropeas ya tenían conciencia de que el área del círculo es proporcional al cuadrado de su radio, y de que circunferencia lo es al diámetro. En el siglo III a. C. Arquímedes de Siracusa, uno de los mayores matemáticos de la Antigüedad, estableció la equivalencia entre ambas razones en su trato Medición de un círculo. El símbolo del que toma nombre esta constante (la letra griega π) fue introducido en 1706 por el británico William Jones (1675-1749) y lo popularizo el matemático suizo Leonahard Euler (1707-17308).

La probabilidad de que dos números naturales cualesquiera sean primeros entre sí es $6/\pi^2$: este es un ejemplo de las curiosas apariciones de pi en distintas ramas de las matemáticas, que han conferido a este número cierta aura de misterio.

En esta figura se da cuenta de las 1,000 primeras cifras del numero pi.

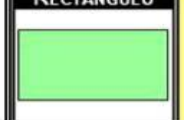
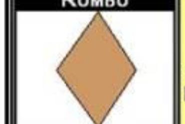
El matemático Augustus de Morgan escribió: ≪…este misterioso 3,14159…que se cuela por todas las puertas y ventanas, que se desliza por cualquier chimenea…≫. En un cuento corto titulado: La pesadilla del matemático, el filósofo y matemático Bertrand Russell escribió: ≪El rostro de π estaba enmascarado; se sobreentendía que nadie podría contemplarlo y continuar con vida≫.

Calcular valores cada vez más exacto de pi ha sido una preocupación de los matemáticos de todas las épocas. A lo largo de la historia se destacan algunas de las aproximaciones obtenidas:

Papiro Rhind (1800 a.C.)	3,1604
Arquímedes (287-212 a.C.)	entre 3,1408 y 3,14285 (22/7)
Herón de Alejandría (siglo I)	3,1408
Claudio Tolomeo (91-165)	3,1416
Liu-Hu (siglo III)	3,14159
Tsu-Chung-Chi (430-500)	3,141592 (355/113)
François Viète (1540-1603)	entre 3,1415926535 y 3,1415926537

Con 39 cifras decimales es suficiente para calcular la longitud de una circunferencia que abarcaría todo el Universo conocido, con un error menor que el radio de un átomo de hidrógeno. No obstante, el ser humano sigue buscando más decimales de pi, aprovechando para ello cada nuevo avance que se realiza en el campo de la informática

ÁREAS DE ALGUNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS Y LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

FORMA	ELEMENTOS	FÓRMULA PERÍMETRO	FÓRMULA ÁREA
TRIÁNGULO 	b: Base h: Altura l: Lado1 m: Lado2 n: Lado3	$P = l + m + n$	$A = \frac{b \times h}{2}$
CUADRADO 	a: Lado	$P = 4a$	$A = a^2$
RECTÁNGULO 	b: Base h: Altura	$P = 2b + 2h$	$A = b \times h$
ROMBO 	a: Lado d: Diagonal menor D: Diagonal mayor	$P = 4a$	$A = \frac{D \times d}{2}$
ROMBOIDE 	b: Base h: Altura	$P = 2b + 2h$	$A = b \times h$
TRAPECIO 	l: Lado1 m: Lado2 n: Lado3 o: Lado4 b: Base menor B: Base mayor h: Altura	$P = l + m + n + o$	$A = \frac{h\,(B + b)}{2}$

CONVERSIÓN DE UNIDADES					
Unidades de longitud		**Unidades de superficie**		**Unidades de Volumen**	
1 km	1 000	1 km^2	1 000 000 m^2	1 km^3	1 000 000 000 m^3
1 hm	100	1 hm^2	10 000 m^2	1 hm^3	1 000 000 m^3
1 dam	10 m	1 dam^2	100 m^2	1 dam^3	1 000 m^3
1 m	1 m	1 m^2	1 m^2	1 m^3	1 m^3
1 dm	0.1 m	1 dm^2	0,01 m^2	1 d^3	0,001 m^3
1 cm	0.01 m	1 cm^2	0,0001 m^2	1 cm^3	0,000 001 m^3
1 mm	0.001 m	1 mm^2	0,000001 m^2	1 mm^3	0,000 000 001 m^3

 Lic. *Ruth B. Díaz Castañeda* www.educapanama.edu.pa Portal Educativo