1| ÁLGEBRA

TEMA 1. LA POTENCIACIÓN

- **Repaso**

La potenciación era conocida ya desde la antigüedad, los babilonios utilizaban la elevación a potencia como auxiliar de la multiplicación. Los griegos por su parte tenían predilección por los cuadrados y los cubos.

La potenciación es el producto de varios factores iguales. Para abreviar la escritura, se escribe el factor que se repite y en la parte superior derecha del mismo se coloca el número de veces que se multiplica.

Si bien la palabra exponente pasó a significar cosas diferentes, el primer uso moderno registrado de exponente en matemáticas fue en un libro llamado "Integra Arithemetica", escrito en 1544 por el autor inglés y matemático Michael Stifel. Pero él simplemente estaba trabajando con una base de dos, de modo que, por ejemplo, el exponente 3 significaba la cantidad de números 2 que tendrías que multiplicar para obtener 8. Lo que se vería así: $2^3 = 8$.

- Potencia de exponente natural

Una potencia es el producto de factores iguales, es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n \text{ veces } a \text{ como factor}}$$

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional, el producto de $\frac{a}{b}$ por sí mismo n veces, es una potencia, es decir, una potencia es un producto de varios factores iguales:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n - veces} = \frac{c}{d}$$

exponente: indica las veces que se multiplica la base.

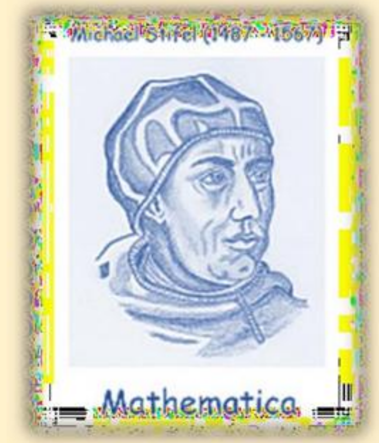
base: es el número que se multiplica.

potencia: es el resultado de la multiplicación reiterada.

Donde;

$c = a^n$ y $d = b^n$

SABÍAS QUE…



La palabra exponente en sí misma proviene del latín "expo", que significa "fuera de", y "ponere", que significa "lugar".

El método de Stifel se diría que es un poco retrógrado en comparación con la forma en que pensamos acerca del tema hoy.

Él diría que "el 3 es la configuración del 8".

Hoy en día, nos referimos a eso simplemente como una ecuación de 2 al cubo. Hay que recordar que él estaba trabajando exclusivamente con una base o un factor de 2 y traduciendo del latín un poco más literalmente de lo que hacemos actualmente.

- Propiedades de las potencias

Propiedad	Ejemplo		Descripción
Potencia de exponente cero.	$a^0 = 1$	$7^0 = 1$	Toda base cuyo exponente es cero, la potencia es igual a uno.
Potencia de exponente uno.	$a^1 = a$	$15^1=15$	Toda base cuyo exponente es el número uno, la potencia es igual a la misma base.
Potencias de base uno.	$1^n = 1$	$1^n = 1$	Si la base es el número uno y el exponente es cualquier número natural, la potencia es uno.
Producto de bases iguales.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$	Al multiplicar dos o más bases iguales, los exponentes se suman.
Cociente de bases iguales.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$	Al dividir dos bases iguales, los exponentes se restan.
Multiplicación de bases diferentes con el mismo exponente.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$ $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$	Las bases se elevan al mismo exponente y se halla la potencia, también se puede multiplicar las bases y calcular la potencia.
Cociente de bases diferentes e igual exponente.	$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(\frac{2}{3})^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$	Se elevan las bases al mismo exponente y se dividen las bases, se calcula la potencia.
Potencia de exponente negativo.	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$	$3^{-2} = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$	La potencia será su inverso elevado a la misma potencia
Potencia de una potencia.	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^3)^2=3^{(3*2)} = 3^6=729$	Se multiplican los exponentes y se calcula la potencia.

- Signo de una potencia

La potencia de exponente par es siempre positiva.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

La potencia de exponente impar tendrá el mismo signo de la base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

Ejemplos 1: desarrolle: $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

Solución:

Al ser el exponente 2 y la base $\frac{1}{3}$ se debe multiplicar 2 veces ella misma

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right) \text{ X } \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

Ejemplos 2: ¿Cuál es el resultado $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Ejemplos 3: desarrolle $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

Solución:
Se aplica la propiedad correspondiente y luego se desarrolla la potencia:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{(3)^3}{(4)^3}} = \frac{(4)^3}{(3)^3} = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$$

Ejemplos 4: realice la simplificación de $\left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

Solución:
Se aplica la propiedad correspondiente y luego se desarrolla la potencia:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{5-2-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{5-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

Ejemplos 5: simplifique la siguiente expresión $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}$

Solución:
Se aplican las propiedades correspondientes y luego se desarrolla la potencia:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{7-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{9}{16}}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$$

Ejemplos 6: simplifique la expresión $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}\right]^{-2}$

Solución:
Se aplican las propiedades correspondientes y luego se desarrolla la potencia:

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}\right]^{-2}=\left[\frac{\frac{(1)^3}{(3)^3}}{\frac{(2)^2}{(3)^2}}\right]^{-2}=\left[\frac{(1)^3(3)^2}{(3)^3(2)^2}\right]^{-2}=\left[\frac{1}{(3)(2)^2}\right]^{-2}=\frac{(1)^{-2}}{(3)^{-2}[(2)^2]^{-2}}$$

$$=\frac{(1)^{-2}}{(3)^{-2}(2)^{-4}}=\frac{\frac{1}{(1)^2}}{\frac{1}{(3)^2}\frac{1}{(2)^4}}=\frac{(3)^2(2)^4}{(1)^2}=\frac{(9)(16)}{1}=144$$

Ejemplos 7: simplifique $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}$

Solución:
Se aplican las propiedades correspondientes y luego se desarrolla la potencia:

$$\left(\frac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{2^3}{2^4}\right)^{-2}$$

$$=(2^{-1})^{-2}=2^2=4$$