TEMA 2. RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La raíz cuadrada de un número racional es:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \quad \textit{significa que} \quad \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1: El número racional $\frac{9}{25}$ tiene dos raíces cuadradas:

Se representa así:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}, \textit{ porque } \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\ -\frac{3}{5}, \textit{ porque } \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \end{cases}$$

En general, todo número racional positivo $\frac{a}{b}$ tiene dos raíces cuadradas opuestas entre sí. Los números racionales negativos no tienen raíz cuadrada, porque cualquier número elevado al cuadrado da un resultado positivo.

Ejemplo 2: Demuestre que $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ ***no existe***

Solución:

Solución:

Dado que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$ y $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$, queda demostrado que no existe la raíz de un número racional negativo.

La raíz enésima de un número racional $\frac{a}{b}$ es otro número $\frac{c}{d}$ que elevado a la potencia n da como resultado $\frac{a}{b}$

Índice → $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a}{b}$

Radical

Base

Raíz

- Raíces cuadradas exactas

$\sqrt{\boldsymbol{Radicando}}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{144}$	⋯
Raíz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…

Las raíces cuadradas exactas son infinitas, recuerda que la radicación es la operación inversa de la potenciación. Por lo cual; si $\sqrt{4} = 2$ (la raíz cuadrada de 4 es 2) es por qué si elevamos la raíz al cuadrado, obtenemos el radicando,

$$2^2 = (2)\ (2) = 4$$

- Reglas de los signos

a) Cuando el índice es un número impar, la raíz tiene el mismo signo de la base.
b) Cuando el índice es un número par y la base es negativa, no tiene solución en el campo de los números racionales.
c) Cuando el índice es un número par y la base es positiva, hay dos resultados que tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

- Propiedades de los radicales
  - $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot {}^{n}$
  - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
  - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
  - $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nm]{a^{rm}}$
  - $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n/m]{a^{r/m}}$
  - $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplos 1: aplique las propiedades de los radicales y calcula $\sqrt{\frac{1}{9}}$

Solución:
Se descompone la base en factores primos y se extrae a raíz:

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1^2}{3^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ejemplos 2: encuentre la raíz quinta de $-\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{243}}$

Solución:

Se descompone $-\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{243}}$ en factores primos y se aplican las propiedades:

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{2^5}{3^5}} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{5}} = -\frac{2}{3}$$

Ejemplos 3: ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}}$?

Solución:
Se descompone la base en factores primos y se aplican las propiedades:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^6}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{1}{2}$$

Ejemplos 4: Ejemplos 4: ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}} \div \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}}$?

Solución:
Se descomponen las bases en factores primos y se aplican las propiedades:

$$\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}} \div \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \div \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}$$