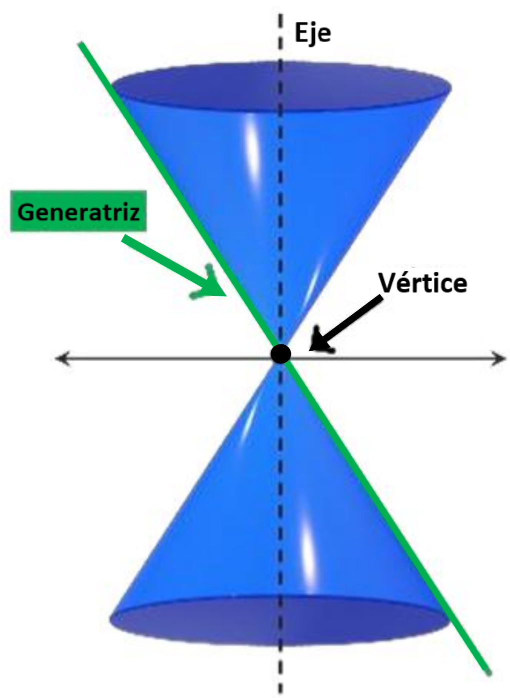
TEMA 7. LAS SECCIONES CÓNICAS

¡Hagamos un poco de Historia!

En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas.

Las secciones cónicas son curvas que pueden obtenerse como la intersección de un cono circular recto con un plano que no contenga el vértice del cono.

Una superficie cónica de revolución o cono de doble hoja se obtiene al girar una recta alrededor de una recta fija llamada eje.



El punto de corte de ambas rectas es el vértice de la superficie cónica. Las diferentes cónicas se obtienen al intersecar una superficie cónica con un plano. Las curvas obtenidas pueden ser: una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

Parábola	Circunferencia	Elipse	Hipérbola
			
El plano es paralelo a la generatriz de la superficie cónica	El plano corta de forma perpendicular a la superficie cónica.	El plano corta transversalmente a la superficie cónica.	El plano es paralelo al eje de la superficie cónica.

Si desea aprender más sobre las secciones cónicas, le recomendamos mirar con detenimiento el video que aparece en el enlace debajo de la siguiente figura.

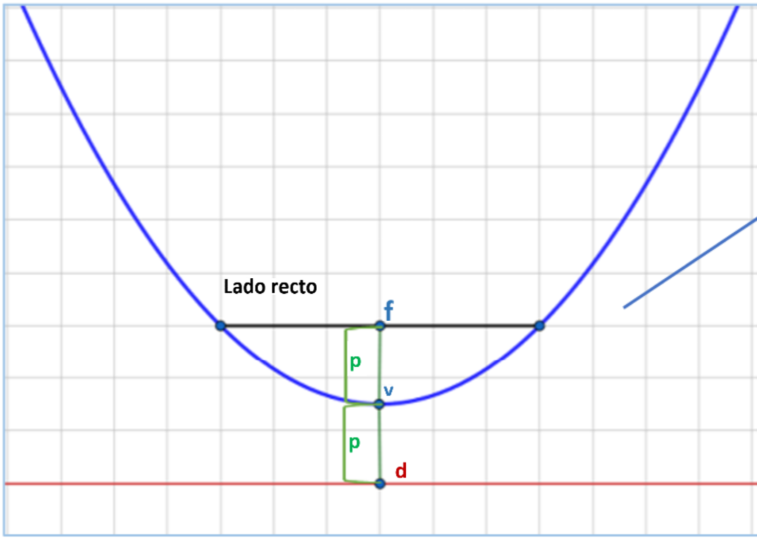
Para profundizar, en la forma estándar de la recta, le recomendamos observar el siguiente video4. Acceda aquí en el icono o copie la dirección https://www.youtube.com/watch?v=GHgHx1X4XDI

Iniciaremos con el estudio de las secciones cónicas, en particular con la parábola como recomienda e Currículo priorizado del MEDUCA para el área de Profesional y Técnica.

- Parábola

Las parábolas se conocen comúnmente como las gráficas de funciones cuadráticas. Pueden también verse como el conjunto de todos los puntos cuya distancia desde un punto determinado (el **foco**) es igual a su distancia desde una línea determinada (la **directriz**).

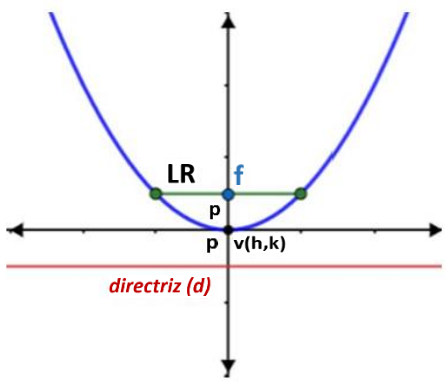
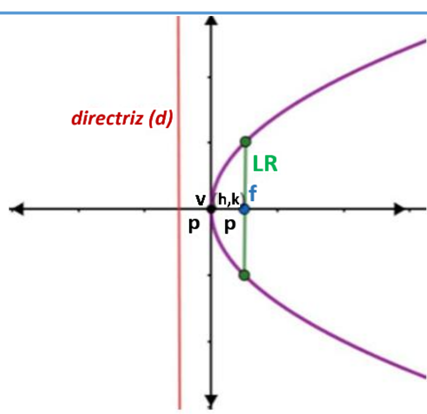
- *Foco* (f): *Es el punto fijo.*
- *Vértice* (v): *Es el punto medio entre el foco y la directriz.*
- *Directriz* (d): *Es la recta fija.*
- *Parámetro* (p): *Es la distancia entre el foco y el vértice de una parábola.*
- *Lado recto* (Lr): *cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz.*
  Es equivalente a 4 *veces el parámetro* $(4p)$.



$Foco\ (f)$
$Vértice\ (v)$
$Directriz\ (d)$
$Parámetro\ (p)$
$Lado\ recto\ (Lr)$

- **Ecuación de la parábola**

Veremos cómo se grafica una parábola cuando se conoce el foco y la directriz. Es importante comprender la siguiente tabla para la resolución de ejercicios.

	Si abre hacia abajo: $(x-h)^2=-4\,p\,(y-k)$ Si abre hacia arriba: $(x-h)^2=4\,p\,(y-k)$
	Si abre hacia la derecha: $(y-k)^2=4\,p\,(x-h)$ Si abre hacia la izquierda: $(y-k)^2=-4\,p\,(x-h)$

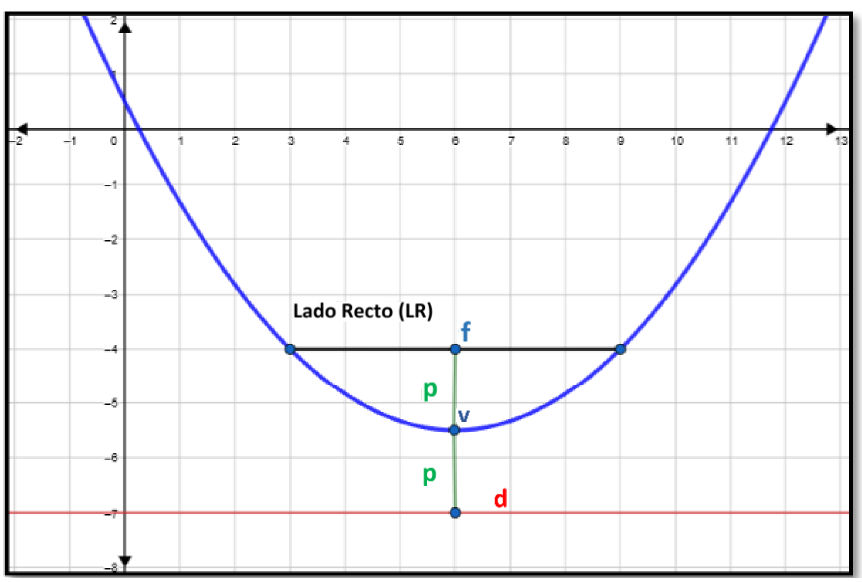
Ejemplo 1. ¿Cuál es la ecuación de la parábola con foco en (6, -4) y directriz en $y=-7$?

Para encontrar la ecuación de la parábola usaremos la siguiente parrilla o tabla, donde ubicaremos primeramente los valores que nos da el enunciado del problema para luego de acuerdo con las definiciones ir buscando el resto. Le recomendamos antes de iniciar tener a mano su plano coordenado para que represente primeramente los valores que le facilita el enunciado y luego los que va obteniendo en el transcurso de la solución.

De acuerdo con los datos que nos proporciona la directriz ($y=-7$), nuestra parábola puede abrir hacia arriba o hacia abajo, ya que al extenderse la parábola no toca la directriz. Cuando graficamos y=-7 se comprende mejor hacia dónde abre la parábola y se complementa cuando ubicamos el foco. Recuerde que el vértice se encuentra entre la directriz y el foco.

Elementos	Procedimiento	Observaciones
$\boldsymbol{Foco}\ (\boldsymbol{f})$	(6, -4)	Me lo facilita el enunciado.
$\boldsymbol{V\acute{e}rtice}\ (\boldsymbol{v})$	Calculamos la distancia entre el foco y un punto en la directriz usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, que corresponde al teorema de Pitágoras. El punto (6, -7) lo obtenemos de la gráfica. $\mathbf{(\overset{x_1}{6}\ ,\overset{y_1}{-4})\ y\ (\overset{x_2}{6}\ ,\overset{y_2}{-7})}$ $d=\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$ $d=\sqrt{(-7--4)^2+(6-6)^2}$ $d=\sqrt{(-7+4)^2+(0)^2}$ $d=\sqrt{(-3)^2+(0)^2}$ $d=\sqrt{9}$ $d=3$ Luego $\mathbf{3 \div 2 = 1,5}$ Por tanto el vértice tiene coordenadas $(\mathbf{6}\ ;\ \mathbf{5,5})$	Es el punto medio entre el foco y la directriz. Se puede calcular con la fórmula de la distancia entre dos puntos o identificar gráficamente. Cuando representamos el punto f en el plano y la directriz (d) nos damos cuenta de que entre ambos hay una distancia de 3 unidades. Como el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz podemos calcularlo dividiendo **3÷2=1,5** Puede usar la estrategia que le resulte más conveniente.
$\boldsymbol{Directriz}\ (\boldsymbol{d})$	$y=-7$	Me lo facilita el enunciado. Su representación en el plano coordenado nos facilita entender hacia dónde puede abrir nuestra parábola. En este caso abre hacia arriba.
$\boldsymbol{Par\acute{a}metro}\ (\boldsymbol{p})$	$p=1,5$	Es la distancia entre el foco y el vértice de la parábola. El cálculo anterior nos permite encontrar esa distancia, la cual es de 1,5 (una unidad con cinco décimas). También se puede obtener a través de la distancia entre dos puntos.

Lado Recto **(*LR*)**	LR = 4(p)= 4(1,5) = 6 unidades El lado recto indica la abertura de la parábola	Cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz. Es equivalente a 4 veces el parámetro (4p).
Ecuación	**Coordenadas del vértice:** $(\overset{h}{6}\,;\overset{K}{5{,}5})$ **p=1,5** Se sustituyen los valores en la ecuación. $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2=\mathbf{4}\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{x}-6)^2=\mathbf{4}\,(1{,}5)\,(\boldsymbol{y}-5{,}5)$ $(\boldsymbol{x}-6)^2=6\,(\boldsymbol{y}-5{,}5)$ $(\boldsymbol{x}-6)^2=6\boldsymbol{y}-33$ $(\boldsymbol{x}-6)^2+33=6\boldsymbol{y}$ $6\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}-6)^2+33$	Puede realizar las operaciones con la ayuda de una calculadora.
	$\boldsymbol{y}=\dfrac{(\boldsymbol{x}-6)^2+33}{6}$ $\boldsymbol{y}=\dfrac{(\boldsymbol{x}-6)^2}{6}+\dfrac{33}{6}$ $\boldsymbol{y}=\dfrac{(\boldsymbol{x}-6)^2}{6}+\dfrac{11}{2}$	



Ejemplo 2. ¿Cuál es la ecuación de la parábola con foco en (-4, 8) y directriz en $x = -6$?

Para encontrar la ecuación de la parábola usaremos la parrilla o tabla parecida al ejemplo 1.

De acuerdo con los datos de la directriz $x = -6$ nuestra parábola puede abrir hacia la derecha o hacia la izquierda, para su mejor comprensión se recomienda graficar la recta.

Elementos	Procedimiento	Observaciones
$\boldsymbol{Foco\ (f)}$	(-4, 8)	Me lo facilita el enunciado.
$\boldsymbol{Vértice\ (v)}$	Calculamos la distancia entre el foco y un punto en la directriz usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, que corresponde al teorema de Pitágoras. El punto (-6,8) lo obtenemos de la gráfica. $\mathbf{(\overset{x_1}{-4}\ ,\overset{y_1}{8})}$ **y** $\mathbf{(\overset{x_2}{-6}\ ,\overset{y_2}{8})}$ $d=\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$ $d=\sqrt{(8-8)^2+(-6--4)^2}$ $d=\sqrt{(8-8)^2+(-6+4)^2}$ $d=\sqrt{(-2)^2}$ $d=\sqrt{4}$ $d=2$ Luego **2÷2=1** Por tanto el vértice tiene coordenadas (**-5**; **8**)	Es el punto medio entre el foco y la directriz. Se puede calcular con la fórmula de la distancia entre dos puntos o a través de la gráfica. Cuando representamos el punto **f** en el plano y la directriz **(d)** nos damos cuenta de que entre ambos hay una distancia de 2 unidades. Como el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz podemos calcularlo dividiendo **2÷2=1** Puede usar la estrategia que le resulte más conveniente.
$\boldsymbol{Directriz\ (d)}$	$y = -6$	Me lo facilita el enunciado. Lo que indica que la parábola puede abrir hacia la derecha o hacia la izquierda. En este caso abre hacia la derecha.
$\boldsymbol{Lado\ Recto\ (LR)}$	$LR = 4(p)= 4(1) = 4$ unidades El lado recto indica la abertura de la parábola.	Cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz. Es equivalente a 4 veces el parámetro (4p).

Ecuación	Coordenadas del vértice: Coordenadas del vértice: $(\overset{h}{-5} ; \overset{k}{8})$ p=1 Se sustituyen los valores en la ecuación. $(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$ $(y-8)^2 = 4\,(1)\,(x- -5)$ $(y-8)^2 = 4\,(x+5)$ $(y-8)^2 = 4\,x + 20$ $(y-8)^2 - 20 = 4x$ $4x = (y-8)^2 - 20$ $x = \frac{(y-8)^2 - 20}{4}$ $x = \frac{(y-8)^2}{4} - \frac{20}{4}$ $x = \frac{(y-8)^2}{4} - 5$	Puede realizar las operaciones con la ayuda de una calculadora.