TEMA 3. DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

A continuación, estudiaremos **desigualdades cuadráticas** con una incógnita.

Para encontrar su solución es necesario emplear en muchas ocasiones los casos de factorización. El método que utilizaremos para resolverlas consiste en:

1. Si la desigualdad tiene términos en ambos miembros, se trasladan todos a un mismo miembro (usualmente se trasladan al miembro izquierdo) de forma que el número cero sea el resultado en el otro miembro.

2. De ser posible se ***factoriza*** el polinomio cuadrático por simple inspección.

3. Determina el valor que hace cero cada factor, esto se obtiene igualando cada factor a cero y despejando la variable, el valor encontrado hace cero el factor, por lo tanto, es una raíz del polinomio cuadrático. Dichas raíces se marcan sobre la recta real, las cuales dividirán a la recta en intervalos.

4. ***Hacer una tabla***. Luego se escoge un elemento o número de cada intervalo (valor de prueba) para descubrir el signo del Polinomio cuadrático.

5. ***Resolver:*** Se selecciona el o los intervalos donde el signo satisfaga la desigualdad, éste o estos intervalos serán el conjunto solución de la desigualdad. Así, si la desigualdad dice **"< 0"**, su conjunto solución son aquellos intervalos donde el signo es negativo **"–"**; y si la desigualdad dice **"> 0 "**, su conjunto solución son aquellos intervalos donde el signo es **positivo "+".**

6. Si las raíces del polinomio no son números racionales, se puede utilizar la fórmula cuadrática para encontrar las raíces reales del polinomio, si las hay. De no tener raíces reales la fórmula cuadrática también te ayuda a determinarlo.

Ejemplo 1: Resuelva la inecuación $x^2 < x + 6.$

Solución: Seguiremos la guía de pasos dada anteriormente:

Este símbolo, nos ayudará a encontrar nuestra respuesta; como es menor buscamos un negativo.

$x^2 < x + 6.$

$x^2 - x - 6 < 0$ →Colocamos todos los términos en el miembro izquierdo.

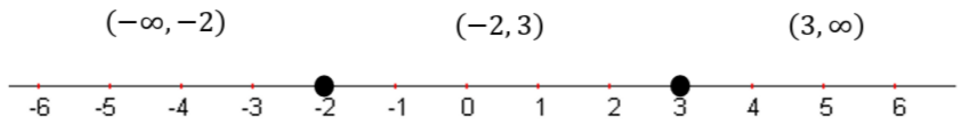
$(x-3)(x+2) < 0$ → Factorizamos.

$x - 3 = 0 \quad x + 2 = 0$

$x = 3 \quad\quad x = -2$

Estos son los intervalos a utilizar.

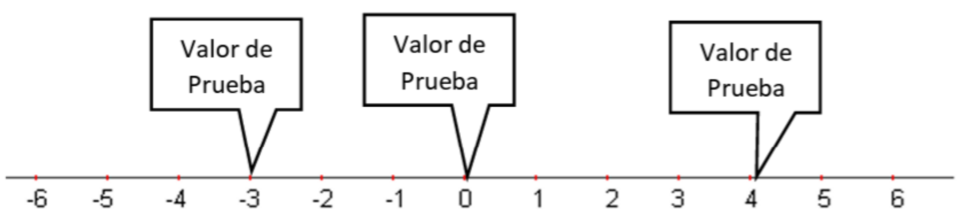
Para encontrar los intervalos debemos ubicar los factores encontrados en la recta numérica



Siguiendo los pasos ahora debemos construir una tabla.

Intervalo	Valor de Prueba	Solución	Signo
$(-\infty, -2)$	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{+6}$	$+$
$(-2, 3)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-6}$	$-$
$(3, \infty)$	$\mathbf{+4}$	$\mathbf{+6}$	$+$

Estos números se llaman valor de prueba, se toman al azar de los intervalos definidos.



Para encontrar la solución debemos evaluar cada valor en la ecuación de original, de la siguiente manera:

Para el Intervalo $(-\infty, -2)$

$$x^2 - x - 6, con\ x = -3$$
$$= (-3)^2 - (-3) - 6$$
$$= 9 + 3 - 6$$
$$= 12 - 6$$
$$= 6$$

Para el Intervalo $(-2, 3)$

$$x^2 - x - 6, con\ x = 0$$
$$= (0)^2 - (0) - 6$$
$$= 0 + 0 - 6$$
$$= -6$$

Para el Intervalo $(3, \infty)$

$$x^2 - x - 6, con\ x = 4$$
$$= (4)^2 - (4) - 6$$
$$= 16 - 4 - 6$$
$$= 16 - 10$$
$$= 6$$

Los signos de cada respuesta, son los que se ubicarán en la columna correspondiente a signo.

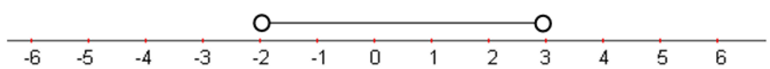
Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
Valor de prueba	$\mathbf{-3}$	**0**	**4**
Signo de $(x+2)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Esta es una forma alternativa de realizar la búsqueda de la solución.
Aquí utilizamos los intervalos y buscamos valores de prueba, igual que antes. La diferencia es que evaluamos en cada factor encontrado para obtener el signo. Al final, multiplicamos los signos obtenidos para obtener nuestra respuesta.

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de las tres desigualdades obtenidas, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty, 2)$da $+$,
- El intervalo $(-2,3)$ da – , y
- El intervalo $(3,\infty)$ da $+$.

Como el problema es menor que cero; es decir, $x^2 - x - 6 < 0.$ *La solución es:* (-2,3) puesto que en este intervalo conseguimos una solución negativa y la representación



Ejemplo 2. Resuelva la inecuación $\mathbf{3x^2 + 10x \geq 8}$

Ejemplo 2. Resuelva la inecuación

Solución:

Seguiremos la guía de pasos dada anteriormente:

Este símbolo, nos ayudará a encontrar nuestra respuesta; como es mayor igual buscamos un signo positivo

$3x^2 + 10x \geq 8.$

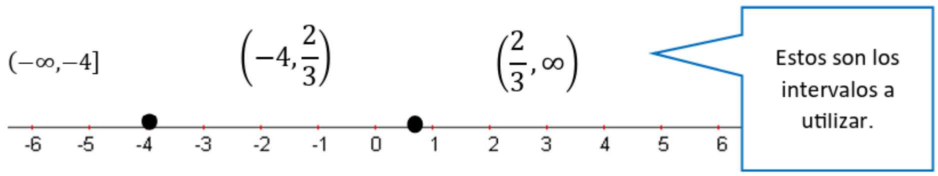
$3x^2 + 10x - 8 \geq 0$ →Colocamos todos los términos al lado izquierdo.

$(3x-2)(x+4) \geq 0$ → Factorizamos

$3x - 2 = 0 \qquad x + 4 = 0$

$x = \dfrac{2}{3} \qquad x = -4$

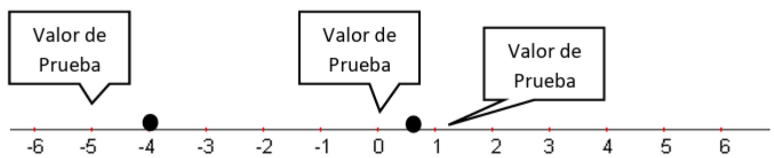
Para encontrar los intervalos debemos ubicar los factores encontrados en la recta numérica



Siguiendo los pasos ahora debemos construir una tabla.

Intervalo	Valor de Prueba	Solución	Signo
$(-\infty,-4)$	**−5**	**17**	**+**
$\left(-4,\frac{2}{3}\right)$	**0**	**− 8**	**−**
$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$	**1**	**5**	**+**

Estos valores se llaman valor de prueba, se toman de los intervalos definidos anteriormente



Para encontrar la solución debemos evaluar cada valor en la ecuación de original, de la siguiente manera:

Para el Intervalo $(-\infty,-4)$

$3x^2 + 10x - 8,$

$con\, x = -5$

$= 3(-5)2 + 10(-5) - 8$

$= 3(25) - 50 - 8$

$= 75 - 58$

$= 17$

Para el Intervalo $\left(-4,\frac{2}{3}\right)$

$3x^2 + 10x - 8,$

$con\, x = 0$

$= 3(0)^2 + 10(0) - 8$

$= 3(0) - 0 - 8$

$= -8$

Para el Intervalo $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$

$3x^2 + 10x - 8,$

$con\, x = 1$

$= 3(1)^2 + 10(1) - 8$

$= 3(1) + 10 - 8$

$= 3 + 10 - 8$

$= 13 - 8$

$= 5$

Los signos de cada respuesta, son los que se ubicaran en la columna correspondiente a signo.

Intervalo	$(-\infty,-4)$	$\left(-4,\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
Valor de prueba	**-5**	**0**	**1**
Signo de $(3x-2)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+4)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(3x-2)(x+4)$	$+$	$-$	$+$

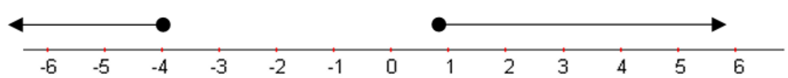
Esta es una forma alternativa de realizar la búsqueda de la solución.
Aquí utilizamos los intervalos y buscamos valores de prueba, igual que antes. La diferencia es que evaluamos en cada factor encontrado para obtener el signo. Al final, multiplicamos los signos obtenidos para obtener nuestra respuesta.

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de las tres desigualdades obtenidas, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty,-4)$ da $+$,
- El intervalo $\left(-4,\frac{2}{3}\right)$ da – , y
- El intervalo $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ da $+$.

Como el problema es mayor que cero; es decir, $3x^2+10x-8\geq 0$. La solución es la unión de los dos intervalos que dan positivo, estos son: $(-\infty,-4)$ y $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$, además la desigualdad también se satisface para los números que la hacen igual a cero, por lo tanto, se deber incluir en la respuesta las raíces del polinomio cuadrático. Esto lo expresamos de la siguiente manera

$(-\infty,-4]\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$ y su gráfica es:



Ampliemos nuestro aprendizaje ¡Ánimo!...

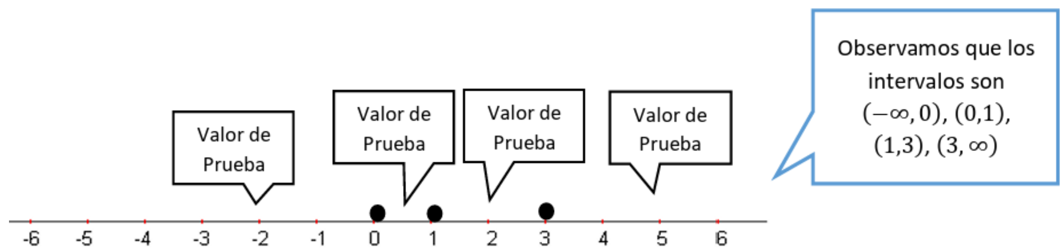
- **Desigualdad polinomial de grado**

Note que, puede guiarse para determinar la solución de una desigualdad polinomial de la secuencia de pasos descrita anteriormente.

Ejemplo 3. Resuelva la desigualdad $x(x-1)^2(x-3) < 0$

Solución:

En este caso, la desigualdad tiene factores repetidos como podemos observar en $(x-1)^2$, también observamos que todos los términos ya están a la izquierda y factorizados; por lo tanto, es fácil encontrar los intervalos de la desigualdad.



Procedemos a hacer la tabla o diagrama para encontrar la solución.

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,1)$,	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Valor de prueba	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0{,}5}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{5}$
Signo de x	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x(x-1)^2(x-3)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de las tres desigualdades obtenidas, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty,0)$ da $+$,
- El intervalo $(0,1)$ da $-$,
- El intervalo $(1,3)$ da $-$,
- El intervalo $(3,\infty)$ da $+$.

Como el problema es menor que cero; es decir, $x(x-1)^2(x-3) < 0$. La solución es la unión de los dos intervalos que dan negativo, estos son: $(0,1), (1,3)$. Esto lo expresamos de la siguiente manera: en **notación de intervalo** $(0,1) \cup (1,3)$ y en **notación gráfica es:**