TEMA9. FUNCIONES TRASCENDENTES

Antes de iniciar debemos recordar aspectos importantes como, por ejemplo, la circunferencia unitaria, que es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia (llamada radio) de un punto fijo (llamado centro) y tiene la particularidad que su centro está en el origen de coordenadas y su radio es una unidad (1).

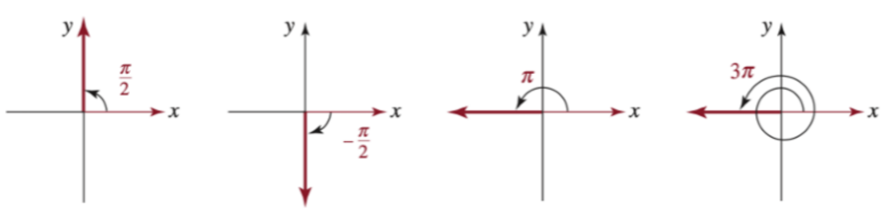
Esta circunferencia unitaria es de gran utilidad para definir las funciones trigonométricas, dado que nos permiten ver la relación entre las razones trigonométricas. Entonces la definiremos formalmente:

Circunferencia Unitaria: es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen del plano cartesiano. Su ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$

En el cálculo, la unidad más cómoda para medir ángulos es el radián. La medida de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco del círculo unitario.

Como ya sabemos, un ángulo θ en posición normal se puede considerar como formado por la rotación del lado inicial, desde el eje positivo de ***x*** hasta el lado terminal. Como se ve en la **FIGURA** 2, el lado inicial de θ recorre una distancia ***t*** a lo largo de la circunferencia del círculo unitario. Se dice que la medida de θ es ***t*** radianes.

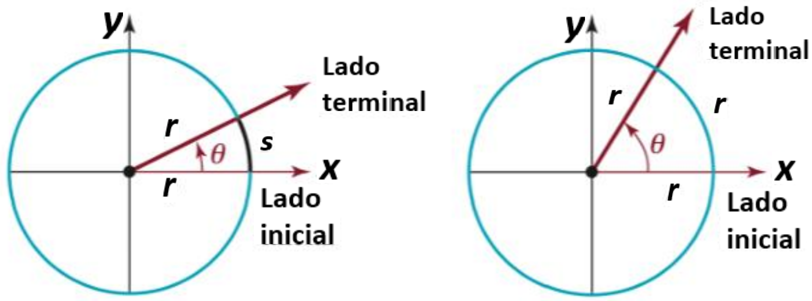
En radianes se usa la misma convención que con la medida en grados: un ángulo formado por una rotación contraria a las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Como la circunferencia del círculo unitario es 2π, un ángulo formado por una rotación en contra de las manecillas del reloj es 2π radianes. En la FIGURA 1 se han ilustrado ángulos de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes,



a) *b)* *c)* *d)*

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (1)$$

En el caso en que el lado terminal de θ atraviesa un arco de longitud s a lo largo de la circunferencia del círculo igual al radio r del círculo, nos damos cuenta, por (1), de que la medida del ángulo θ es 1 radián. Véase la figura 2

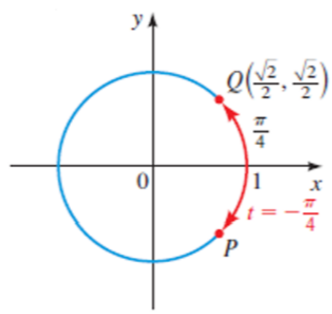


Ahora recordemos su forma de utilizarlos:

Ejemplo: Encuentre el punto terminal determinado por el número real t dado.

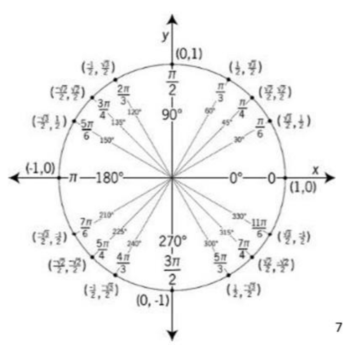
$$t = -\frac{\pi}{4}$$

Sea **P** el punto terminal determinado por $-\frac{\pi}{4}$ y sea **Q** el punto terminal determinado por $\frac{\pi}{4}$. el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en y. Como P está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces el punto terminal es $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



[6] Imagen Ilustrativa

En adelante la siguiente imagen nos ayudara a encontrar los valores de las funciones trigonométricas.



[7] Imagen Ilustrativa

[6] Imagen tomada de Stewart, Redlin, Watson. (2012) **Pre cálculo. Matemáticas para el cálculo.** Sexta Edición. Cengage Learning
[7] Imagen obtenida de www.google.com

A. Funciones trigonométricas

Sea t un número real y sea $P(x,y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\boldsymbol{sen\ t = y} \qquad \boldsymbol{cos\ t = x} \qquad \boldsymbol{tan\ t = \frac{y}{x}, x \neq 0}$$

$$\boldsymbol{csc\ t = \frac{1}{y}}, \quad \boldsymbol{y \neq 0} \quad \boldsymbol{sec\ t = \frac{1}{x}}, \quad \boldsymbol{x \neq 0}$$

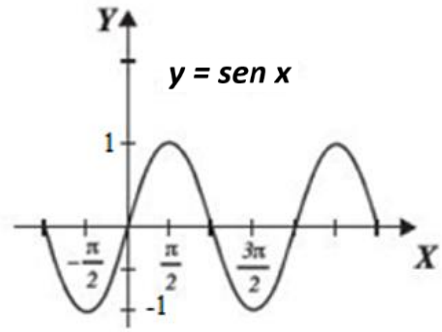
$$\boldsymbol{cot\ t = \frac{x}{y}}, \quad \boldsymbol{y \neq 0}$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de funciones circulares.

Aspectos importantes

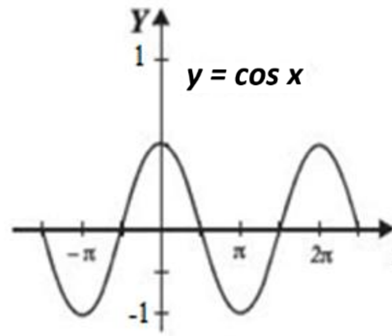
Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante donde se encuentre el punto terminal de *t.*

Cuadrante	Funciones +	Funciones -
I	todas	Ninguna
II	$sen\ x, csc\ x$	$Cos\ x, \sec x,$ $tan\ x, cot\ x$
III	$tan\ x, cot\ x$	$Sen\ x, \csc x,$ $cos\ x, sec\ x$
IV	$cos\ x, sec\ x$	$Sen\ x, \csc x,$ $tan\ x, cot\ x$



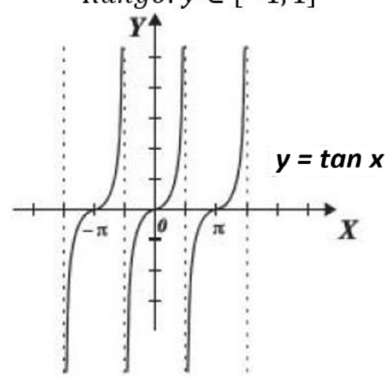
$Dominio: x \in (-\infty, \infty)$

$Rango: y \in [-1, 1]$



$Dominio: x \in (-\infty, \infty)$

$Rango: y \in [-1, 1]$



$Dominio: \left\{ x \in R \,\middle|\, x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in Z \right\}$

$Rango: y \in (-\infty, \infty)$

Las funciones trigonométricas están relacionadas unas a otras mediante expresiones que reciben el nombre de **identidades trigonométricas.**

Identidades recíprocas:

$$\csc t = \frac{1}{sen\ t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

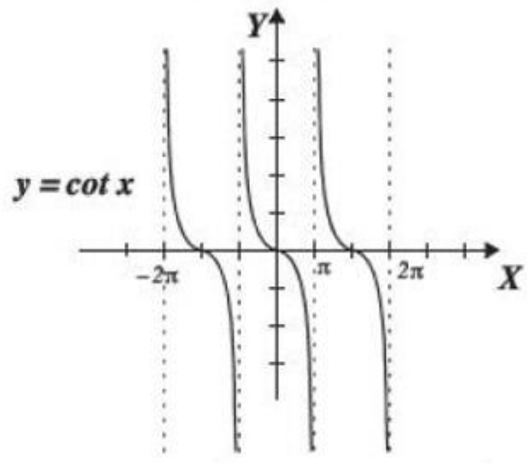
$$\tan t = \frac{sen\ t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades Pitagóricas

$$\boldsymbol{sen\ ^2t + cos^2t = 1} \quad \boldsymbol{tan^2t + 1 = sec^2t}$$
$$\boldsymbol{1 + cos^2t = csc^2t}$$

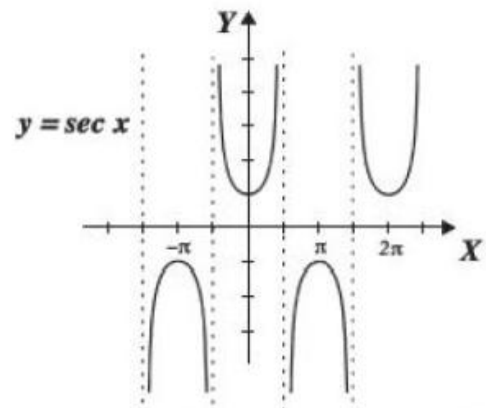
Propiedades periódicas de las funciones

- Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π. Es decir, repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π, para trazar sus gráficas primero se debe graficar un periodo.
- Las funciones tangente y cotangente tienen período π.
- Las funciones cosecante y secante tienen período 2π

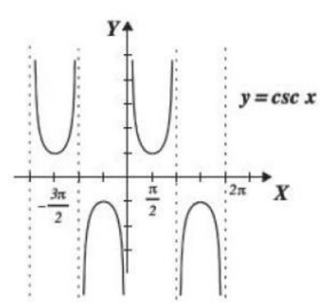


$$Dominio: \{x \in R | x \neq n\pi, n\epsilon Z\}$$

$$Rango: y \in \ (-\infty, \infty)$$



$$Dominio: \left\{x \in R \middle| x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in Z\right\}$$
$$Rango: y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$



$$Dominio: \{x \in R | x \neq n\pi, n \in Z\}$$
$$Rango: y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Evaluación de las funciones trigonométricas

Ejemplo: Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

$$t = \frac{\pi}{3}$$

Solución:

El punto terminal determinado por $t = \frac{\pi}{3}$ es $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. De aquí obtenemos las coordenadas que serán $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tenemos entonces, siguiendo la definición de las funciones trigonométricas dadas:

$sen\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ $\qquad csc\ \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2$

$\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo: Hallar todas las funciones trigonométricas a partir de $\cos t = \frac{3}{5},\ \ t\ en\ Q_4$

Solución: De las identidades pitagóricas tenemos que $\boldsymbol{sen\ ^2t + cos^2t = 1}$ **entonces**

$\boldsymbol{sen\ ^2t + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1}$ → Sustituyendo el valor del coseno

$\boldsymbol{sen\ ^2t = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}}$→ Despejando y reduciendo

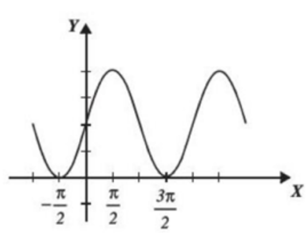
$\boldsymbol{sen\ t = \pm\frac{4}{5}}$

Considerando que está en el cuarto cuadrante, el $sen\ t$ es negativo, así el $sen\ t = -\frac{4}{5}$. De esta manera conocemos el seno y el coseno y así podemos determinar las demás utilizando las recíprocas que definimos anteriormente.

$\tan t = \frac{sen\ t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ $\qquad \csc t = \frac{1}{sen\ t} = -\frac{5}{4}$ $\qquad \sec t = \frac{1}{cost} = \frac{5}{3}$ $\qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$

Ejemplo: Determina la gráfica de $y = 2\ senx + 2$, su dominio y rango.

La función $f(x) = sen\ x$, se alarga 2 unidades verticalmente y se desplaza dos unidades hacia arriba, obteniendo la siguiente gráfica:



¿Podrías decir el dominio y el rango?

B. Función exponencial

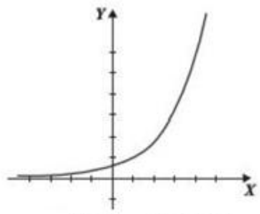
Es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0, a \neq 1$.

Dominio: $D_f: x \in (-\infty, \infty)$

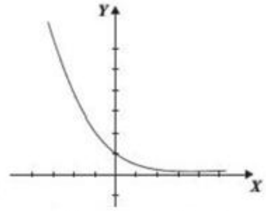
Rango: $y \in (0, \infty)$, si $a = 1$,

Gráfica

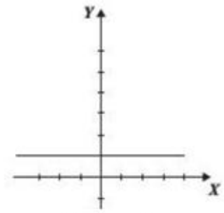
básicamente existen tres tipos:



$f(x) = a^x, a > 1$



$f(x) = a^x, 0 < a < 1$



$f(x) = 1^x$

Ejemplo: Grafica las siguientes funciones exponenciales: $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$.

Solución:

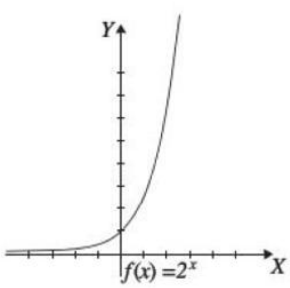
Primero debemos hacer una tabla de valores y luego localizar los puntos para trazar la gráfica. Obtendremos:

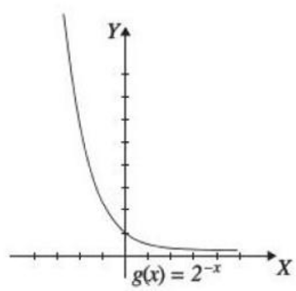
$f(x) = 2^x$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$f(x) = 2^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





Ejemplo: Obtén las gráficas de: $y = -e^{x}$, $y = -e^{-x}$

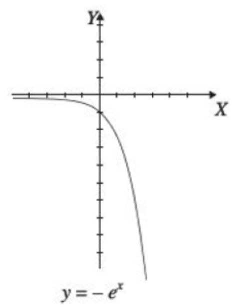
Solución:

Una de las funciones exponenciales más destacadas es: $f(x) = e^{x}, con\ e \approx 2{,}71828$

Luego, creamos una tabla de valores para cada función:

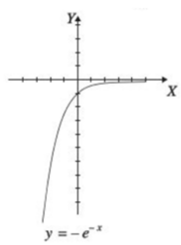
$f(x) = -e^{x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-0,05	-0,14	-0,37	-1	-2,72	-7,39	-20,09



$f(x) = -e^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-20,09	-7,39	-2,72	-1	-0,37	-0.14	-0,05



Las funciones exponenciales se utilizan con frecuencia para calcular el interés compuesto. Donde una cantidad de dinero llamada **principal (P)** se invierte a una tasa de interés i, por período de tiempo, aquí se debe encontrar la cantidad de dinero A, dada una tasa de interés anual (r) en un periodo t de años. A través de la fórmula $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

Ejemplo: Una suma de 1000 se invierte a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años. Si el interés se capitaliza anual, semestral trimestral y diario.

Solución

Para este problema $P = 1000, r = 0.12,\ t = 3$

Anual

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = 1404.93$$

Semestral

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = 1418.52$$

Trimestral

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = 1425.76$$

Diario

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = 1433.24$$

C. Función logarítmica

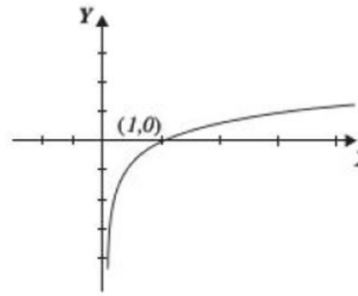
Un logaritmo se define como el exponente al que se eleva un número llamado base, para obtener cierto número, de tal forma que aplicado a la función exponencial queda: $y = a^x \; entonces \; \log_a y = x, y > 0, \; por \; tanto \; f^{-1}(x) = \log_a x$

De lo anterior, se define la *función logarítmica* como $g(x) = \log_a x$

Propiedades de los logaritmos:

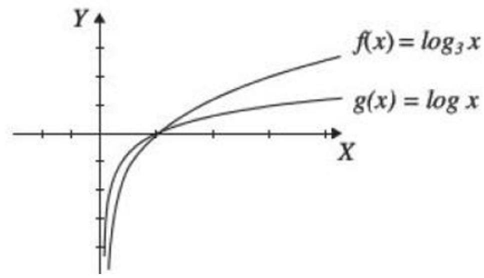
$$log_a 1 = 0$$
$$log_a a = 1$$
$$log_a a^x = x$$
$$a^{log_e x} = x$$

Dominio: $x \in (0, \infty)$,
Rango: $x \in (-\infty, \infty)$
Gráfica:

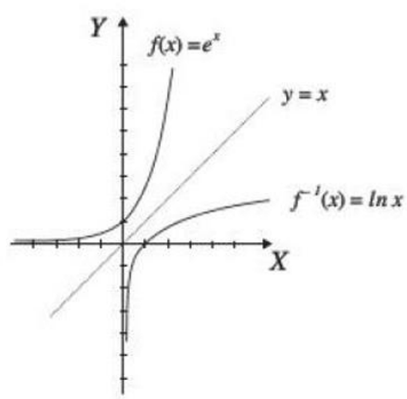


Pasa por el punto (1,0), porque $\log_a 1 = 0$, ya que $a^0 = 1$ es creciente y tiene una asíntota vertical en x=0.

Por ejemplo, las gráficas de las funciones: $f(x) = \log_3 x \; y \; g(x) = \log x \; son$:



Por otro lado, $\ln x = log_e x$
Por lo tanto, si $f(x) = e^x$
Entonces $f^{-1}(x) = \ln x$



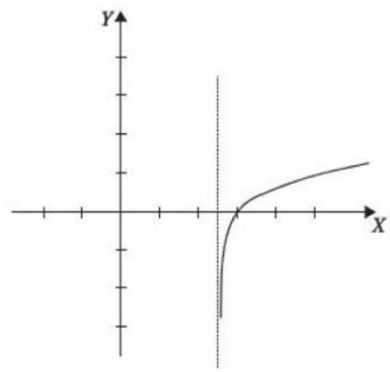
Ejemplo: Determine la gráfica de $y = \log(2x - 5)$.

Solución

Primero determinamos el dominio; recuerda que $\log_b N = a, entonces\ N > 0$

$$2x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \rightarrow x \in (\frac{5}{2}, \infty)$$

Se traza una asíntota en $x = \frac{5}{2}$ y se desplaza la gráfica $y = \log_{10} x$



Ejemplo: Determina la gráfica de $y = \log(x - 3) + 2$

Solución:

Se desplaza la gráfica de $y = \log x$ dos unidades hacia arriba y tres a la derecha