TEMA 10. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

CONTENIDO

El límite de una función es un concepto fundamental del análisis matemático aplicado a las funciones. En particular, el concepto aplica en análisis real al estudio de límites, continuidad y derivabilidad de las funciones reales.

Intuitivamente, el hecho de que una función f alcance un límite L en un punto c significa que, tomando puntos suficientemente próximos a c, el valor de f puede ser tan cercano a L como se desee. La cercanía de los valores de f y L no depende del valor que adquiere f en dicho punto c.

El límite funcional es un concepto relacionado con la variación de los valores de una función a medida que varían los valores de la variable y tienden a un valor determinado. El límite de una función en un valor determinado de x es igual a un número al cual tiende la función cuando la variable tiende a dicho valor. Este hecho se indica así:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Para comprender un poco más el concepto de límite analizaremos el siguiente ejemplo:

Si tenemos el conjunto $A = \left\{\frac{1}{x}\ tal\ que\ x \in \boldsymbol{N}\right\}$ entonces algunos de estos elementos del conjunto serán: $\left\{1, \ldots \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{32}, \ldots\right\}$. Hacemos una representación gráfica del conjunto A en la recta numérica, tendremos:

Como apreciamos en la gráfica, el valor de la expresión $\frac{1}{x}$, se va haciendo cada vez más pequeño y cada vez más cerca de cero; entonces ocurrirá que cuando el valor de x se hace muy grande, $\frac{1}{x}$, será sumamente pequeño, tan pequeño que tiende a anularse, es decir se acerca mucho a cero.

Podemos deducir que la expresión $\frac{1}{x}$, tiene un límite hacia el cual se acerca tanto que puede considerarse igual a él, como podemos ver nuestro ejemplo ese límite es cero.

De lo anterior, concluimos que el límite de la expresión $\frac{1}{x}$, cuando x tiene a infinito (valor sumamente grande), es cero. Esto podemos escribirlo así:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Esta expresión se lee: el límite de $\frac{1}{x}$, cuando x tiende a infinito, es cero.

El cálculo de límites usando valores crecientes y decrecientes emplea demasiado tiempo. Por esos se estudiarán una serie de proposiciones que serán útiles para el cálculo de límites.

TEOREMA SOBRE LÍMITES

1) El límite de una constante c cuando **x** tiende al valor a es la constate c.

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x \to 2} 3 = 3$ 2) $\lim_{x \to 0} (-5) = -5$ 3) $\lim_{x \to 2} 5a = 5a$

2) El límite de **x** cuando **x** tiende a al valor **a** es **a**.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x \to 1/4} x = 1/4$ 2) $\lim_{x \to -2} x = -2$ 3) $\lim_{x \to 4} x = 4$

Caso Particular: El límite del producto de una constante por una función, cuando **x → a**, es igual al producto de la constante por el límite de la función cuando **x → a**.

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot f(a)$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x \to 2} 3x = 3 \lim_{x \to 2} x = 3(2) = 6$ 2) $\lim_{x \to 8} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \lim_{x \to 8} x = \frac{1}{2}(8) = 4$

3) Si **m** y **b** son dos constantes cualesquiera,

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Las reglas para el cálculo de límites se aplican a las operaciones principales: si se opera con dos funciones, siendo las operaciones adición, sustracción, multiplicación, división o potencia, y se calcula su límite en un punto, el resultado es igual a la misma operación aplicada al resultado de los límites de dichas funciones en el punto en cuestión.

11.1 Límites indeterminados

Hasta ahora al calcular el límite de una fracción hemos visto:

a. Si el numerador y el denominador tienen límite distinto de cero, el límite de la fracción es igual al cociente de los límites.
b. Si el límite del numerador es cero y el denominador es distinto de cero, el límite de la fracción es cero.
c. Si el límite del numerador es distinto de cero y el denominador es cero, la fracción no tiene límite y se dice que tiende a más o menos infinito, según el caso.

Pero si el límite del numerador y del denominador son ambos iguales a cero se obtiene la expresión $\frac{0}{0}$, que es una de las formas llamadas indeterminadas porque cualquier número que se ponga como cociente cumple con la condición de que multiplicando por el divisor es igual al dividendo.

Observa la siguiente situación: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$

Siempre que se obtenga una indeterminación $\frac{0}{0}$ al hacer una sustitución y antes de afirmar que el límite no existe, se deberá simplificar la función dada para eliminar la indeterminación, para luego encontrar el límite.

INDETERMINACIÓN DE LA FORMA $\frac{0}{0}$

Una indeterminación es una expresión cuyo valor no se puede establecer en forma directa y que depende del límite específico donde se presenta. Las principales indeterminaciones son:

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad 1^{\infty} \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 0^0$$

Veamos los siguientes casos de INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$

CASO A: $\frac{0}{0}$ **de Funciones Racionales compuestas por polinomios en el numerador** $P(x)$ **y en el denominador** $Q(x)$

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot ?}{(x-a) \cdot ?} =$$

Este tipo de indeterminación se puede resolver factorizando el numerador y denominador de la fracción, a fin de establecer cuál es el factor que en ambos polinomios origina el valor de cero. Una vez que este factor se cancele (y por tanto se rompa la indeterminación), la expresión simplificada tantas veces como sea necesaria generará el resultado definitivo.

Veamos algunos ejemplos:

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} =$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(1)^2+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Esta es la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Se retoma el problema para eliminar la indeterminación de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x+2 \quad \text{con} \quad x \neq 1$$

Factorizamos el trinomio $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

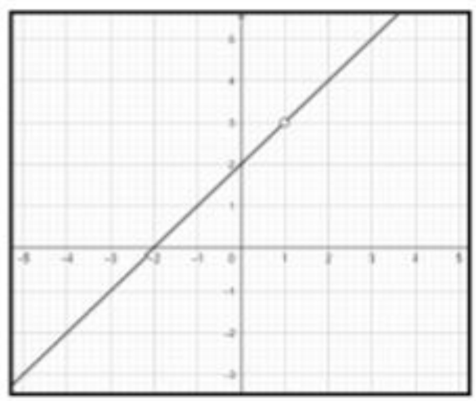
$x \neq 1$ no se está dividiendo entre cero

Ahora se toma el límite cuando x tiende, pero no es igual, a 1; con lo que se obtiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+2) = 1+2 = 3$$

De donde se concluye:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$$



En la gráfica se puede apreciar que:

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$ por lo que se concluye que $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$

2. $\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right)$

Solución:

$\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right) = \frac{4(-1)+4}{(-1)^3+1} = \frac{0}{0}$ **(forma indeterminada)**

Se retoma el problema y se factoriza las expresiones del numerador y el denominador. Así:

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{4(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{4}{x^2-x+1}\right) = \frac{4}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{4}{3} \text{ (Existe)}$$

Luego, $\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right) = \frac{4}{3}$

Caso B: $\frac{0}{0}$ de Funciones Irracionales

Se racionaliza la expresión, multiplicando numerador y denominador por el conjugado

Cuando aparezcan raíces se procede a racionalizar la función, es decir a multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del numerador o del denominador o ambos conjugados de ser necesario, otro método de resolución es realizar un cambio de variable con el fin de simplificar y luego sustituir. Veamos:

Ejemplos:

1. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x}\right)$

Solución:

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x}\right) = \frac{9-\sqrt{0+81}}{0} = \frac{9-9}{0} = \frac{0}{0}$ **(Forma indeterminada)**

Se retoma el problema y se procede a multiplicar por la conjugada para raíces cuadradas, de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x} \cdot \frac{9+\sqrt{x+81}}{9+\sqrt{x+81}}\right)$$

Multiplicando por el conjugado

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{9^2-(\sqrt{x+81})^2}{x\,(9+\sqrt{x+81})}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{81-(x+81)}{x\,(9+\sqrt{x+81})}\right) \Rightarrow$$

Resolviendo operaciones

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cancel{81}-x-\cancel{81}}{x\,(9+\sqrt{x+81})}\right) \Rightarrow$$

Reduciendo términos semejantes

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(9+\sqrt{x+81})}\right) \Rightarrow$$

simplificando

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-1}{(9+\sqrt{x+81})}\right) = \left(\frac{-1}{(9+\sqrt{0+81})}\right) = \left(\frac{-1}{9+\sqrt{81}}\right) = \left(\frac{-1}{9+9}\right) = \frac{-1}{18} = -\frac{1}{18} \text{ (existe)}$$

Este mismo problema se pudo resolver mediante un cambio de variable como se ilustra a continuación:

Consideramos $u^2 = x + 81$, de forma que cuando $x \to 0$ entonces $u^2 = 0 + 81 \Rightarrow u = +9$ resultando que $u \to 9$, el límite que se desea calcular quedaría expresado así:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x}\right) = \lim_{u\to 9}\frac{9-\sqrt{u^2}}{u^2-81} \quad \Rightarrow \quad \text{Cambio de variable}$$

$$= \lim_{u\to 9}\frac{9-u}{(u-9)(u+9)} \quad \Rightarrow \quad \text{Factorizando el denominador}$$

$$= \lim_{u\to 9}\frac{-\cancel{(u-9)}}{\cancel{(u-9)}(u+9)} \quad \Rightarrow \quad \text{simplificando}$$

$$= \lim_{u\to 9}\frac{-1}{(u+9)} = \frac{-1}{9+9} = \frac{-1}{18} = -\frac{1}{18} \ \textbf{(existe)}$$

11.2 LÍMITES UNILATERALES

El símbolo $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}^+$ significa que x se aproxima $\underline{\boldsymbol{a}}$ por la derecha, es decir, se realiza a través de un acercamiento progresivo al valor de $\underline{\boldsymbol{a}}$ mediante números mayores que él; además, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}^-$ significa que x se aproxima $\underline{\boldsymbol{a}}$ por la izquierda, es decir se realiza a través de un acercamiento progresivo al valor de $\underline{\boldsymbol{a}}$ mediante números menores que él.

Veamos sus definiciones en términos matemáticos:

- Sea f una función que está definida en todos los números de algún intervalo abierto $(\boldsymbol{a}, c)$. Entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a $\boldsymbol{a}$ por la derecha es **L**, y se denota $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
- Sea f una función que está definida en todos los números de un intervalo abierto $(d, \boldsymbol{a})$. Entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a $\boldsymbol{a}$ por la izquierda es **L** y se denota $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

a) Si para alguna función $f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$, ***entonces se dice que*** $\lim_{x\to a} f(x) = L$

b) Si el $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$, ***entonces el*** $\lim_{x\to a} f(x)$ ***no existe.***

Lo anterior descrito quiere decir que una función ***f*** tiene límite ***L*** cuando tiende ***a***. Podemos decir, que su límite existe, si existe el límite por la izquierda y el límite por la derecha, y si ambos límites **(*L*)** son iguales. Si estos límites son diferentes entonces concluimos que el límite de la función no existe.

OBSERVEMOS DETENIDAMENTE EL SIGUIENTE EJEMPLO:

Considere la función ***H*** definida así:

$$H(x) = \begin{cases} x+4\,, & para\; x \leq -4 \\ 4-x. & para\; x > -4 \end{cases}$$

Representa de forma gráfica la función y analiza qué sucede a medida nos acercamos más y más al valor indicado, pretendiendo con esto hallar los siguientes límites, si existen. Veamos:

a) $\lim\limits_{x \to -4} H(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$

SOLUCIÓN:

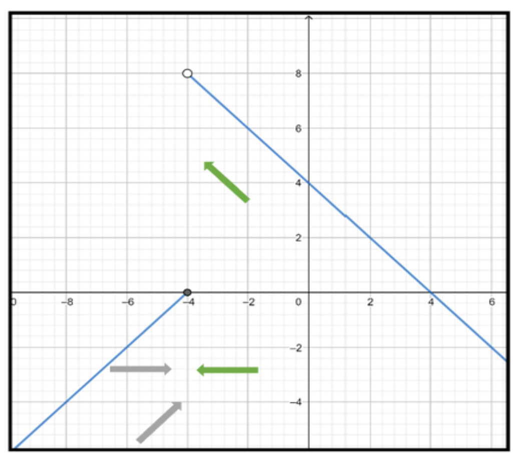
Los límites por la izquierda y por la derecha se verifican de forma numérica, con una tabla de valores de entrada y de salida, y en forma gráfica. Así:

a) $\lim\limits_{x \to -4} H(x)$

DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LIMITE

$x \to -4^-\ (x < -4)$	$H(x)$
-5	-1
-4,9	- 0,9
- 4,5	- 0,5
- 4,1	- 0,1
- 4,01	- 0,01
- 4,001	- 0,001
$x \to -4^+\ (x > -4)$	$H(x)$
-3	7
-3,1	7,1
-3,5	7.5
-3,9	7,9
-3,99	7,99
-3,999	7,999

DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LIMITE



Observa que a medida que los valores de entrada tienden a - 4 por la izquierda, los valores de salida $H(x)$ tienden a 0, de manera que el límite por la izquierda es 0, es decir $\lim\limits_{x \to -4^-} H(x) = 0$; y a medida que los valores de entrada tienden a - 4 por la derecha, los valores de salida $H(x)$ tienden a 8, por lo tanto, el límite por la derecha es 8, es decir $\lim_{x \to -4^+} H(x) = 8$

Puesto que el límite por la izquierda, 0, no es el mismo límite por la derecha, 8, se dice que: $\lim_{x \to -4} H(x) \qquad no\ existe$

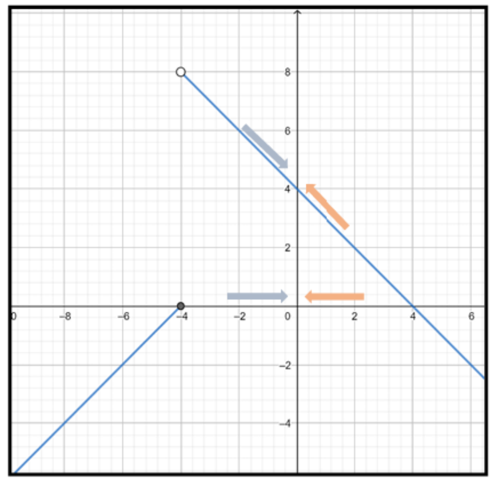
Es Importante señalar que $H(-4) = 0$, pero el límite no es cero. El valor de la función existe, pero el límite no.

b) $\lim_{x \to 0} H(x)$

DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LIMITE

$x \to 0^- \ (x < 0)$	$H(x)$
-1	3
- 0,5	3,5
- 0,1	3,9
- 0,01	3,99
- 0,001	3,999
$x \to 0^+ \ (x > 0)$	$H(x)$
1	3
0,5	3,5
0,1	3,9
0,01	3,99
0,001	3,999

DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LIMITE



Observa que a medida que los valores de entrada tienden a 0 por la izquierda, los valores de salida $H(x)$ tienden a 4, de manera que el límite por la izquierda es 4, es decir $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 4$; y a medida que los valores de entrada tienden a 0 por la derecha, los valores de salida $H(x)$ tienden a 4, por lo tanto, el límite por la derecha es 4, es decir $\lim_{x \to 0^+} H(x) = 4$

Puesto que el límite por la izquierda, 4, es el mismo límite por la derecha, 4, se dice que: $\lim_{x \to 0} H(x) = 4 \qquad existe$

11.3 LÍMITES INFINITOS

Se dice que existe limite infinito cuando la función ***f(x)*** llega a valores que crecen continuamente, es decir que se puede hacer la función tan grande como queramos. En cambio, se dice que ***f(x)*** diverge a infinito. Para ello, el valor al que tienda la variable independiente **x** puede tanto un numero finito, como tender al infinito (límites al infinito).

Teorema 1: Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$

Si a un número real cualquiera y c una constante diferente de cero, entonces:

Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores positivos*** de ***f(x)***: $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 5} = \frac{(5)^2 - 3(5) + 1}{(5) - 5} = \frac{25 - 15 + 1}{5 - 5} = \frac{11}{0} = +\infty$

Observación: $g(x) = x^2 - 3x + 1$ y $f(x) = x - 5$, por consiguiente $\lim_{x \to 5^+} g(x) = 11 > 0$ y $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 0$, por lo tanto $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores negativos*** de ***f(x):*** $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3^-} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(3) + 1}{(3)^2 - 2(3) - 3} = \frac{3 + 1}{9 - 6 - 3} = \frac{4}{0} = -\infty$

Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores positivos*** de ***f(x):*** $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to -1^+} \frac{3x^2 - x - 5}{x^2 - 1} = \frac{3(-1)^2 - (-1) - 5}{(-1)^2 - 1} = \frac{3 + 1 - 5}{1 - 1} = \frac{-1}{0}$

Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores negativos*** de ***f(x):*** $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 2} = \frac{(2)^2 - 4(2) + 1}{(2) - 2} = \frac{4 - 8 + 1}{2 - 2} = \frac{-3}{0} = +\infty$

Teorema 2: ***Si r es cualquier entero positivo, entonces:***

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^r}=\infty \qquad \textit{Ejemplo: } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^7}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^r}=+\infty \qquad \textit{Ejemplo: } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^r}=\begin{cases}-\infty & si\ \ r\ \ es\ \ impar\\ +\infty & si\ \ r\ \ es\ \ par\end{cases} \qquad \textit{Ejemplos: } \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty \ \text{ y } \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

Teorema 3:

A. ***Si r es cualquier entero positivo, entonces:***

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

B. Límites en el infinito de una función racional. Recordemos que una función racional es el cociente de dos polinomios.

Sea $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{q_n(x)}$ en donde $\boldsymbol{m}\ y\ \boldsymbol{n}$ son los grados de los polinomios.

$$\boxed{\text{Si } \boldsymbol{m} < \boldsymbol{n},\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+4}$ Aplicando el teorema, por lo tanto, el grado es 1, es decir m = 1;

$q_n(x)=x^2+4$, el grado es dos, **n** = 2. Luego, como $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$.

También se puede dividir numerador y denominador por la máxima potencia y se aplica la parte **A** del Teorema. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\dfrac{\frac{1}{x}+0}{1+0}=\dfrac{0}{1}=0$

$$\boxed{\text{Si } \boldsymbol{m} > \boldsymbol{n},\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty}$$

El signo apropiado se determina mediante los polinomios $p_m(x)$ y $q_n(x)$; si ellos tienen el mismo signo cuando x se hace mayor el cociente es positivo; si ellos tienen signos diferentes el cociente es negativo.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3x+4}{3x+5}=+\infty$

Si $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a}{b}$ donde $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente de x^m en el numerador y $\boldsymbol{b}$ es el coeficiente de x^n en el denominador.

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x + 1}{3x^3 + 2x + 7} = \frac{1}{3}$