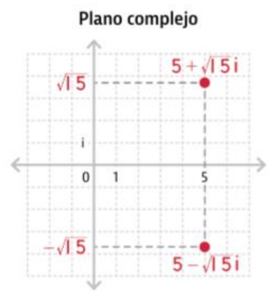
# Unidad 1
## Aritmética





Los números complejos nacen a partir de la necesidad del ser humano de encontrar soluciones a ecuaciones cuadráticas cuyas raíces no pertenecían al conjunto de los números reales hasta entonces conocidos. El primer trabajo que contempla estos números pertenece a Girolamo Cardano en el año 1545, cuando resolvió la ecuación x (10 - x) = 40, y obtuvo como resultado $5 \pm \sqrt{15}i$. Sin embargo, la primera raíz cuadrada negativa de la que se tiene registro, es más antigua y corresponde a la que calculó Herón de Alejandría hacia el año 50 a. C., quien intentó calcular $\pm\sqrt{81-144}$, pero la consideró imposible y se dio por vencido. Leonhard Euler introdujo la notación que utilizamos en la actualidad para trabajar con este tipo de números, definiendo que i $\sqrt{-1} = i$; él expresó que estos números son imposibles (llamados imaginarios i por Cardano) porque solo existen en la imaginación. En 1637 René Descartes introduce la forma utilizada en la actualidad a + bi para expresar los números complejos.

## En esta unidad aprenderás a:

→ Conocer sobre el concepto y la definición del conjunto de los números complejos.
→ Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos.
→ Calcular raíces cuadradas de números negativos.
→ Representar la gráfica de números complejos.
→ Realizar operaciones con números complejos en el plano complejo.

## Lección 1. Los números complejos

### 1.1. Repasa tus conocimientos

1. Une el nombre de cada conjunto numérico con su representación.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Conjunto de los números naturales | ● | ● | Q |
| Conjunto de los números enteros | ● | ● | I |
| Conjunto de los números racionales | ● | ● | Z |
| Conjunto de los números irracional | ● | ● | R |
| Conjunto de los números reales | ● | ● | N |

2. Marca con un gancho (✓) los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número.

| | 3,6 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\sqrt{-6}$ | $3.5\overline{3}$ | $-\sqrt{6}$ | $-5$ | $\pi$ | $\sqrt{9}$ | $\sqrt[3]{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | | | | | | | | | | |
| $\mathbb{Z}$ | | | | | | | | | | |
| $\mathbb{Q}$ | | | | | | | | | | |
| $\mathbb{I}$ | | | | | | | | | | |
| $\mathbb{R}$ | | | | | | | | | | |

3. Escribe el valor de cada raíz.

a. $\sqrt{81}$ __________
b. $\sqrt[3]{-8}$ __________
c. $\sqrt{28}$ __________
d. $-\sqrt{64}$ __________
e. $\sqrt[3]{27}$ __________
f. $\sqrt{125}$ __________

4. Realiza las siguientes sumas y restas de polinomios.

a. $(x - 1) + (5x - 5)$
b. $(3a + 4) - (a + 1)$
c. $\left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right) + (3x^2 + 4)$
d. $\left(\frac{3}{2}y - 1\right) - \left(-13y + \frac{9}{7}\right)$
e. $(6n - 8) + (2n + 2)$
f. $(4b^3 + 3) - (4b^3 + 8)$

5. Multiplica los siguientes polinomios.

a. $3a^3 \cdot (-3a)$
b. $7x^2 \cdot 4x^2$
c. $-7d^5(3d^3 - 1)$
d. $(5b + 9)(3b - 3)$
e. $y(9y - 3)$
f. $(4z - 3)(z - 1)$

## 1.2. El conjunto de los números complejos

### A. Problema

Calcula las siguientes raíces cuadradas:

$\sqrt{49}$ $\sqrt{100}$ $\sqrt{225}$

$\sqrt{-16}$ $\sqrt{-81}$ $\sqrt{-25}$

### B. Solución

Observa el cálculo de cada raíz cuadrada:

1. $\sqrt{49}$ → Como $7^2 = 49$, se determina que $\sqrt{49} = 7$.
2. $\sqrt{100}$ → Como $10^2 = 100$, se determina que $\sqrt{100} = 10$.
3. $\sqrt{225}$ → Como $15^2 = 225$, se determina que $\sqrt{225} = 15$.
4. $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-81}$ y $\sqrt{-25}$ → Como ningún número real elevado a la 2 puede dar como resultado un número negativo, no es posible determinar en el conjunto de los números reales la raíz cuadrada de estos números.

### C. Conclusión

Se llama unidad imaginaria, y se denota por i, al número que satisface la ecuación $i^2 = -1$, es decir: $i = \sqrt{-1}$

Dados dos números reales cualesquiera **a** y **b,** el número escrito de la forma **z = a + bi** se llama **número complejo**.
Al conjunto de todos los números complejos se le denota por C.
Si **z = a + bi** es un número complejo, puede suceder alguno de los siguientes casos:

→ Si b = 0 entonces **z** es un número real.

→ Si a y b son diferentes de cero entonces z se llama **número imaginario.**

→ Si a = 0 y b ≠ 0 entonces **z = bi** se llama **número imaginario puro.**

Al número a se le llama parte real de **z,** y se denota por **Re(z);** mientras que al número b se le llama parte imaginaria de z, y se denota por **Im(z).**
Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes real e imaginaria son iguales, y viceversa.

Ejemplo: Determina Re(z) e Im(z) en el número complejo z = 5 – 7i.

Re(z) = 5 Im(z) = -7

La forma de un número complejo es:

$z = a + bi$

bi → Parte imaginaria

a → Parte real

**Recuerda**

Las partes de la radicación son:

índice → $\sqrt[n]{a} = b$ ← raíz

radicando

**¿Qué pasaría?**

Si la radicación que se calcula tiene índice impar y radicando negativo, la raíz es negativa.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{-1000} = -10$

**Recuerda**

Toda resta puede expresarse como una suma.

Ejemplo:

5 - 7 = 5 + (-7)

### ¿Qué pasaría?

Si un número se escribe de la forma:

-2i + 10

Recuerda que la suma es conmutativa y es equivalente a:

10 + (-2i)

### Observa cómo se hace

Observa cómo se determina Re(z) (parte real) e Im(z) (parte imaginaria) de cada número complejo:

**1.** $z = \sqrt{2} + i \rightarrow \mathrm{Re}(z) = \sqrt{2} \quad \mathrm{Im}(z) = 1$

**2.** $z = \dfrac{-4 + 9i}{2}$

Primero reescribe z, así: $z = \dfrac{-4}{2} + \dfrac{9i}{2} = -2 + \dfrac{9}{2}i$

Luego, determina la parte real y la parte imaginaria: Re(z) = -2 Im(z) = $\dfrac{9}{2}$

## D. Práctica

**1.** Subraya los números que pertenecen al conjunto de los números complejos (C) pero no al de los números reales (R).

a. $z = -2i$

b. $z = 8 - 9i$

c. $z = 6$

d. $z = \dfrac{-5}{3}$

e. $z = \sqrt{3}\,i$

f. $z = \dfrac{-4}{3} + \sqrt{8}\,i$

**2.** Circula los números que son imaginarios puros.

$z = 2 - 10i \qquad z = 9i \qquad z = -\dfrac{12}{7}i \qquad z = \sqrt{7} \qquad z = -14i \qquad z = -7 - 18i$

**3.** Anota la parte real y la parte imaginaria de cada **z.**

a. $z = -3 + 8i$

b. $z = \dfrac{1}{2} - 6i$

c. $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}\,i$

d. $z = 11i$

e. $z = 3$

f. $z \quad \dfrac{-12 - i}{3}$

**4.** Escribe los números complejos que se forman según los datos dados.

a. Re(z) = 5 Im(z) = $\dfrac{1}{2}$

b. Re(z) = 0 Im(z) = 17

c. Re(z) = $\dfrac{7}{6}$ Im(z) = -10

d. Re(z) = -15 Im(z) = 0

e. Re(z) = 7 Im(z) = -5

f. Re(z) = $-\sqrt{11}$ Im(z) = $\sqrt{2}$

**5.** Simplifica cada expresión numérica. Luego, determina la parte real y la parte imaginaria de **z.**

a. $z = -1 + 6 + 5i$

b. $z = \dfrac{10}{3} + 4i + 1$

c. $z = -6 + 4i - 6i$

d. $z = \dfrac{-7}{9} + 2i + \dfrac{4}{9}i$

e. $z = 7 + 4i - 8$

f. $z = \dfrac{6}{7} + i - \dfrac{1}{2}$

g. $z = -5i + 1 + 5i$

h. $z = \dfrac{9}{5}i - \dfrac{7}{5} + 7i$

## 1.3. Suma, resta y multiplicación de números complejos

### A. Problema

Si **z = 3 + 7i** y **w = 2** - 3i, ¿cuál es el resultado de cada operación?

→ Considera el número i como una variable para realizar las operaciones.

**1.** z + w  **2.** z – w  **3.** zw

### B. Solución

**1.** Resuelve la suma de números complejos.

**z + w = (3 + 7i) + (2 – 3i)** — Sustituye el valor de cada letra con el número complejo que representa.

= 3 + 7i + 2 – 3i — Elimina los paréntesis que agrupan cada número complejo.

= (3 + 2) + (7 – 3) i — Suma los términos que sean “semejantes”.

= 5 + 4i

**2.** Resuelve la resta de números complejos.

**z – w = (3 + 7i) – (2 – 3i)** — Sustituye el valor de cada letra con el número complejo que representa.

= 3 + 7i – 2 + 3i — Elimina los paréntesis que agrupan cada número complejo cambiando los signos de la parte real e imaginaria de w.

= (3 – 2) + (7 + 3) i — Resta los términos que sean “semejantes”

= 1 + 10i

**3.** Resuelve la multiplicación de números complejos.

**zw = (3 + 7i) (2 – 3i)** — Sustituye el valor de cada letra con el número complejo que representa.

$= 3 \cdot 2 + [3 \cdot -3 + 7 \cdot 2]i + 7(-3)\, i^2$ — Desarrolla la multiplicación como producto de binomios.

$= 6 + (-9 + 14)\, i - 21 \cdot -1$ — Resuelve las operaciones y toma en cuenta que $i^2$ = -1 y sustituye.

= 6 + 21 + 5i — Suma los términos que sean “semejantes”

= 27 + 5i

Por lo tanto, z + w = 5 + 4i, z – w = 1 + 10i y zw = 27 + 5i.

### C. Conclusión

La suma y resta de los números complejos **z = a + bi y w = c + di** se denotan por **z + w** y **z – w** respectivamente, y se definen:

→ z + w = (a + c) + (b + d) i  → z - w = (a - c) + (b - d) i

**Recuerda**

Cuando se representa una multiplicación entre 2 o más variables no es necesario escribir el símbolo de multiplicación. Por ejemplo:

$z \cdot w = zw$

**Recuerda**

Para multiplicar variables iguales, se suman los exponentes y se mantiene la variable.

Por ejemplo:

$i \cdot i = i^{1+1} = i^2$

El **producto** de los números complejos **z = a + bi** y **w = c + di** se denota por **zw** y se define:

→ zw = (ac - bd) + (ad + bc) i

El **complejo conjugado** de **z = a + bi**, o simplemente conjugado de z es otro número complejo denotado por $\bar{z}$ tal que $\bar{z} = a - bi$.

**Ejemplos:** Calcula z + w, z - w, zw y $\bar{z}$ para z = -4 + 2i y w = 7 - i.

**1.** z + w = (-4 + 7) + [2 + (-1)]i = 3 + i

**2.** z - w = (-4 - 7) + [2 - (-1)]i = -11 + 3i

**3.** zw = [-4 · 7 - 2 · (-1)] + [(-4) · (-1) + 2 · 7]i

= [-28 + 2] + [4 + 14]i

= -26 + 18i

**4.** $\bar{z}$ = -4 - 2i

## Observa cómo se hace

Resuelve las siguientes operaciones.

**1.** (i + 9) + (10 - 3i) = (9 + 10) + [1 + (-3)]i = 19 + (-2) i = 19 - 2i

**2.** (8i - 7) - (i - 4) = [-7 - (-4)] + (8 - 1) i = -3 + 7i

**3.** (1 + 9i) (4 + 8i) = [1 · 4 - 9 · 8] + [1 · 8 + 9 · 4]i = [4 - 72] + [8 + 36]i = -68 + 44i

## D. Práctica

**1.** Escribe el resultado de z + w, z - w, zw, $\bar{z}$ y $\bar{w}$.

a. z = -5 + 4i, w = 2 - 3i

z + w = ______________

z − w = ______________

zw = ______________

$\bar{z}$ = ______________

$\bar{w}$ = ______________

b. z = 4 - i, w = -6 + 4i

z + w = ______________

z − w = ______________

zw = ______________

$\bar{z}$ = ______________

$\bar{w}$ = ______________

c. z = -3 + 8i, w = 2

z + w = ______________

z − w = ______________

zw = ______________

$\bar{z}$ = ______________

$\bar{w}$ = ______________

d. z = -5 - 4i, w = 8 + 6i

z + w = ______________

z − w = ______________

zw = ______________

$\bar{z}$ = ______________

$\bar{w}$ = ______________

**2.** Resuelve las siguientes operaciones.

a. (-2 + 8i) + (5 - 9i)

b. $\left(1 - \frac{2}{3}i\right) - \left(\frac{1}{3} + 10i\right)$

c. (-18 + 4i)(2 + 10i)

d. (6 + 7i) - (3 + 4i)

e. (9 + 6i)(4 + 2i)

f. (1 + 6i) + (9 - 9i)