REPÚBLICA DE PANAMÁ
— GOBIERNO NACIONAL —

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EL MUNDO MARAVILLOSO DE LA MATEMÁTICA

11°

Talleres para Alumnos

2020 - 2021
FASE DE VALIDACIÓN

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Autoridades

S. E. Maruja Gorday de Villalobos
Ministra de Educación

S. E. Zonia Gallardo de Smith
Viceministra Académica

S. E. José Pío Castillero
Viceministro Administrativo

S. E. Ricardo Sánchez
Viceministro de Infraestructura

Equipo Directivo

Dirección General

Guillermo Alegría
Director General de Educación

Victoria Tello
Subdirectora General de Educación Académica

Anayka De La Espada
Subdirectora General Técnico Administrativa

Directores Nacionales Académicos

Isis Núñez
Directora Nacional de Educación Media Académica

Carlos González
Director Nacional de Educación Media Profesional y Técnica

Agnes de Cotes
Directora Nacional de Jóvenes y Adultos

Carmen Reyes
Directora Nacional de Currículo y Tecnología Educativa

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Dirección Nacional de Educación Media Académica
Dirección Nacional de Educación Media Profesional y Técnica
Dirección Nacional de Jóvenes y Adultos

Estudiante: ______________________________

Centro Educativo: ______________________________

MATEMÁTICA UNDÉCIMO GRADO – MEDIA ACADÉMICA

Prof. Isis Núñez
Directora Nacional de Educación Media Académica

Créditos

Equipo Coordinador

Eduvigis Mercedes Rodríguez I.
Coordinadora General

Lenin Hernández
Apoyo Técnico Curricular 10°

Emiliano González
Apoyo Técnico Curricular 11°

Lysseth A. Pittí
Apoyo Técnico Curricular 12°

Aracelly Agudo
Diseño de Portadas

Docentes Especialistas de Matemática

Décimo Grado

- **Cristina González Guerra**

Región de Panamá Centro
Instituto Comercial Panamá

- **Cynthia Candanedo**

Región de la Comarca Ngäbe Buglé
I.P. T. Sitio Prado

- **Elsa Eugenia González Serrano**

Región de Chiriquí

- Colegio Comercial Tolé

Nilka O. Solís Samudio

Región de Chiriquí

- Colegio Francisco Morazán

Undécimo Grado

- **Johanna E. Castillo M.**

Región de Veraguas
Colegio José Bonifacio Alvarado

- **Juan Manuel Quirós**

Región de Panamá Oeste
Escuela Stella Sierra

- **Janeth Aparicio de Higuera**

Región de Coclé
I. P.T. Industrial de Aguadulce

- **Dalba Janet Morán Arias**

Región de Coclé
Instituto Carmen Conté Lombardo

- **Lorenzo Caballero Vigil**

Región de Veraguas
C.E.B.G. José Santos Puga

Colaboradores y correctores

Aritmética

- Yosari Alvarado
- Arnulfo Ariel Ríos Aparicio
- Fernando Domínguez
- Rosaura Pérez Araúz

Algebra

- Yassir E. Bruce M.
- Edilberto José Adames Pineda
- Migdalia Lineth Domínguez

Geometría

- Maricela Muñoz
- Daniel Alvarado Moreno

Trigonometría y cálculo

- Américo Rodríguez

Duodécimo Grado

- **Reyna Jaramillo**

Región de Veraguas
Instituto Urracá

- **Joel Almanza**

Región de Herrera
C. E. B. G. De Parita

- **Anastasio Serrano Abrego**

Región de Bocas del Toro
C.E.B.G. Bilingüe Guabito

- **Neuza Delgado de Pinzón**

Región de Coclé
C. E. Bilingüe Federico Zúñiga Feliú

- **Jane Cedeño**

Región de Chiriquí
Instituto David

- **José A. Echeverría**

Región de Chiriquí
Benigno Tomas Argote

- **Abdul Troncoso**

Región de Chiriquí
I.P.T Diurno de David

- **Dalys Villarreal**

Región de Coclé
I.P. T. Industrial de Aguadulce

- **Nurkia Díaz de Mendieta**

Región de Panamá Centro
I.P.T. Don Bosco

Mensaje para los estudiantes

Apreciado estudiante:

Pensando en ti, para que puedas lograr tus sueños, queremos que sigas aprendiendo. Ahora que estás en casa, aprovecha y comparte con tu familia, escribe historias con tus personajes favoritos, lee todo lo que puedas, imagina un mundo mejor, cuida a los animales, siembra un árbol; en fin, aprovecha el tiempo y trata de ser muy feliz.

¡Te extrañamos! pronto nos veremos, recuerda que es importante que sigas aprendiendo. Para lograrlo, debes desarrollar cada una de las asignaciones y actividades, que han sido elaboradas, especialmente para ti. Trata de hacerlo de forma independiente, si tienes quien te ayude, ¡fabuloso! Pero recuerda, tienes una oportunidad valiosa para que, a través de los libros, puedas conocer el mundo, aprender la magia de los números, viajar con la lectura, analizar la importancia del agua, los beneficios de los árboles, el funcionamiento de nuestro cuerpo y los cuidados que debemos darle.

Eres de gran valor para tu familia y nuestro país, por eso debes cuidar tu salud y seguir las recomendaciones para la prevención de enfermedades.

Pronto volveremos a la escuela y queremos que nos digas cuanto aprendiste, el tema más interesante que desarrollaste, la lectura que más te gustó, lo divertido que fue para ti, aprender en casa. ¡Nos veremos pronto, todo va a salir bien!

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Contenido

UNIDAD 1: TRIGONOMETRÍA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplica las identidades trigonométricas fundamentales en la solución de problemas.
- Desarrolla la capacidad de razonamiento lógico mediante la demostración de identidades trigonométricas.
- Usa las identidades trigonométricas de ángulos compuestos en la solución de problemas.
- Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando algoritmos de ecuaciones lineales y cuadráticas.

INDICADORES DE LOGRO

- Deduce las identidades trigonométricas fundamentales, aplicando razones trigonométricas, con precisión.
- Demuestra identidades trigonométricas aplicando correctamente procesos algebraicos.
- Determina la solución de ejercicios, utilizando las identidades de ángulos compuestos, ángulos especiales y ángulos cuadrantes, mostrando actitud crítica.
- Resuelve con seguridad y disposición, ecuaciones trigonométricas, aplicando los algoritmos de la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas

UNIDAD 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Identifica los elementos de la recta.
- Determina las diferentes formas de la ecuación de la recta.
- Identifica los elementos de la parábola.
- Determina las diferentes formas de la ecuación de la parábola.
- Deduce la ecuación de los diferentes cónicos dados algunos de sus elementos.
- Utiliza software como recurso tecnológico para graficar las diferentes formas de líneas rectas y las cónicas.

INDICADORES DE LOGRO

- Deduce y utiliza con seguridad, la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.
- Resuelve ejercicios utilizando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.
- Determina con exactitud los elementos y construye la gráfica de cada una de las cónicas.
- Determina correctamente, la ecuación de cada una de las cónicas conociendo algunos de sus elementos.
- Grafica correctamente cada uno de los elementos la cónica.
- Resuelve con responsabilidad problemas de aplicación de cónicas, aplicando sus respectivos procesos.

UNIDAD 3: ÁLGEBRA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplica las matrices y determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

INDICADORES DE LOGRO

- Resuelve operaciones con matrices con seguridad.
- Resuelve situaciones reales utilizando el álgebra de matrices.
- Aplica con precisión el escalonamiento de Gauss para resolver una matriz.
- Identifica con dominio y confianza los elementos de un determinante.
- Resuelve correctamente ejercicios y problemas aplicando determinantes

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

- **Aprender a aprender:** Muestra capacidad permanente para obtener y aplicar nuevos conocimientos y adquirir destrezas.
  Desarrolla la habilidad para utilizar y relacionar situaciones reales que involucren diferentes tipos de aplicación en el área técnica de los números complejos, inecuaciones y la trigonometría.
- **Matemáticas:** Resuelve los conceptos matemáticos en la solución de situaciones de su entorno.
- **Tratamiento de la información y competencia digital:** Participa en proyectos innovadores mediante la aplicación de estrategias diversas con miras a la solución de situaciones de su entorno.
- **Autonomía e iniciativa personal:** Manifiesta actitud perseverante hasta lograr las metas que se ha propuesto.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Lápiz, borrador cuaderno, calculadora, Microsoft Office-Excel.

PRESENTACIÓN

El COVID-19 nos ha cambiado la vida, ahora debemos estar en casa y no en las escuelas como estamos acostumbrados. De esta manera evitamos un mayor contagio en las comunidades, en nuestras familias y amigos. Para que continúe estudiando en su casa, un grupo de docentes de matemática y los egresados de la Maestría en Didáctica de la Matemática, dictada por la Universidad Autónoma de Barcelona; Auspiciada por la SENACYT, hemos elaborado esta guía de aprendizaje con el fin de que nuestros estudiantes sean competentes y descubran la importancia de la matemática y sus aplicaciones en la naturaleza, en la vida diaria y en el mundo. El propósito fundamental es mejorar la calidad en los procesos de enseñanza.

Las temáticas presentadas corresponden al currículo priorizado de undécimo grado de la educación media académica. En los talleres que hemos seleccionado está considerada la problemática que existe en esta área y el papel fundamental de la visualización en el desarrollo de problemas matemáticos.

La relación con la naturaleza, el contexto y la relación con otras ciencias, permiten que el estudiante desarrolle la visualización explorando y observando lo que sucede con los objetos que existen en su medio, que se valore a sí mismo y aborde problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue e integre los conocimientos tecnológicos, humanísticos y científicos que faciliten el establecimiento de relaciones entre los diferentes campos del saber humano.

A continuación, presentamos los conceptos básicos mediante una secuencia de actividades (Introducción-I, Temas-T, Autoevaluación-A); que corresponden al año lectivo 2020, **las mismas pueden ser desarrolladas en este cuadernillo o en su portafolio de actividades.**

Bienvenidos al "*Mundo Maravilloso de la Matemática*".

#aprendoencasa, ¡Juntos lo lograremos!

Docentes del Mundo Maravilloso de la Matemática.

1 | TRIGONOMETRÍA

TEMA 1. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

Se ha preguntado alguna vez…

¿cuál es el origen del estudio de los ángulos y de los triángulos?

¡Hagamos un poco de Historia!

En sus orígenes prácticos los babilonios y los egipcios utilizaban los ángulos y los triángulos para efectuar medidas en la agricultura y en la construcción de edificios; con el estudio de ellos, también se predecían las rutas y posiciones de los cuerpos celestes, la exactitud en la navegación y el cálculo del tiempo y los calendarios. Todas estas relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos para medir distancias y extensiones de terreno por triangulación son estudiadas por la trigonometría la cual, etimológicamente, significa Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρ'ια) medida, es decir, "medida de tres ángulos".

"Los babilonios determinaron aproximaciones de medidas de ángulos o de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos. Varias tablas grabadas sobre arcilla lo testimonian. Por ejemplo, una tablilla babilonia escrita en cuneiforme, denominada Plimpton 322 ***(en torno al 1900 a. C.)*** *muestra quince ternas pitagóricas y una columna de números que puede ser interpretada como una tabla de funciones trigonométricas (Figura1); sin embargo, existen varios debates sobre si, en realidad, se trata de una tabla trigonométrica.*

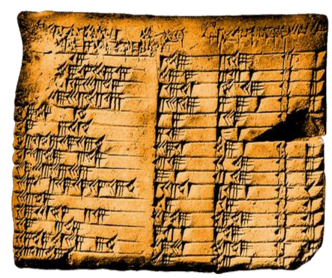


Figura 1. Tablilla babilonia escrita en cuneiforme

Los egipcios dividieron a los 360 grados de la eclíptica en 36 secciones de 10 grados cada uno. (Figura 2). Esta división era 2300 años a. C. cada sección de diez grados (llamado decano de la palabra griega diez) contenía una constelación de estrellas, alineadas a lo largo de la eclíptica. Dado que la Tierra realiza una rotación completa en 24 horas, las estrellas en un nuevo decanato se levantarán sobre el horizonte más o menos cada 40 minutos. El

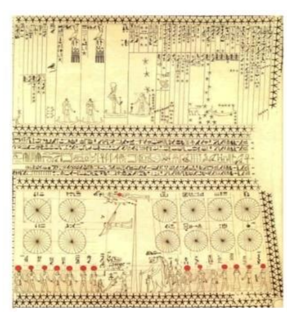


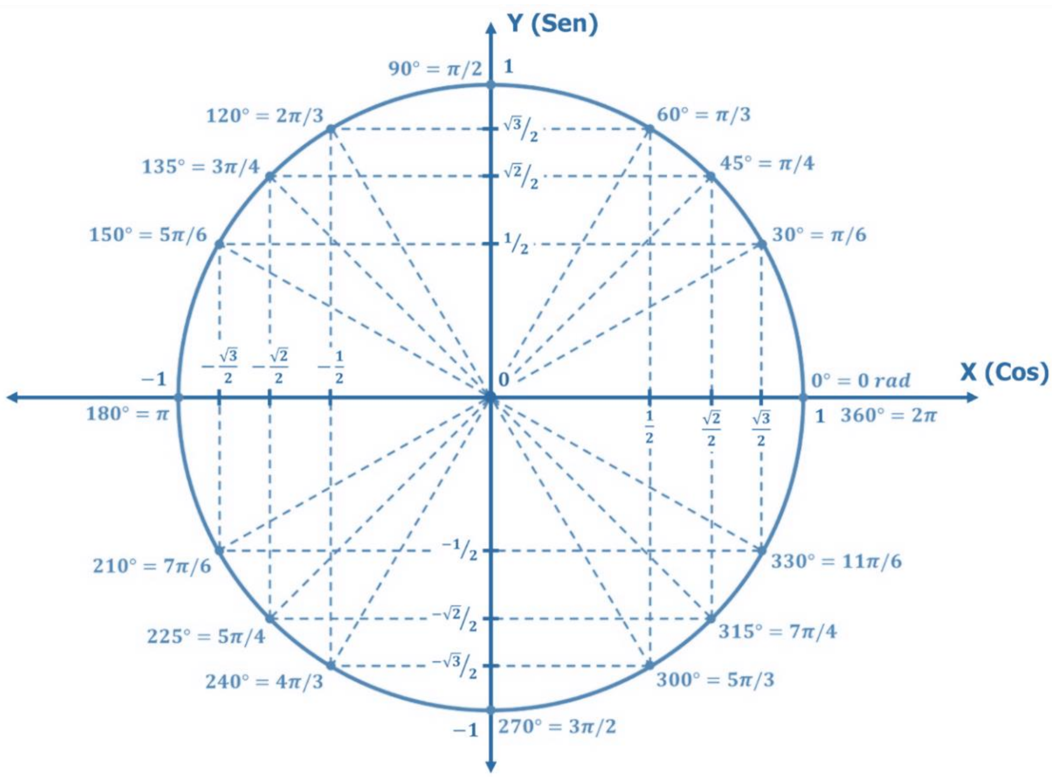
Figura 2. División de 360° de la eclíptica en 36 secciones de 10° cada una.

sistema de decanos se utilizó para determinar las horas de la noche y las estaciones".[1]

ACTIVIDAD N°1.

Desarrolle las siguientes actividades de repaso sobre la historia de la trigonometría y conceptos básicos.

1. Observe el video historia de la trigonometría en el canal de YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=Xh73G2rVFfo
   a) Realice según lo aprendido en el video un mapa conceptual de la historia de la trigonometría cronológicamente. Realice el mapa en hoja tamaño carta, blanca.
2. Observe el círculo unitario[2] y completa las siguientes tablas:



a) Complete la tabla y los valores del círculo unitario con los datos anteriores:

Ángulo	30	45°	60°	90°	180°	225°	270°	315°	360°
Radianes	π/6								

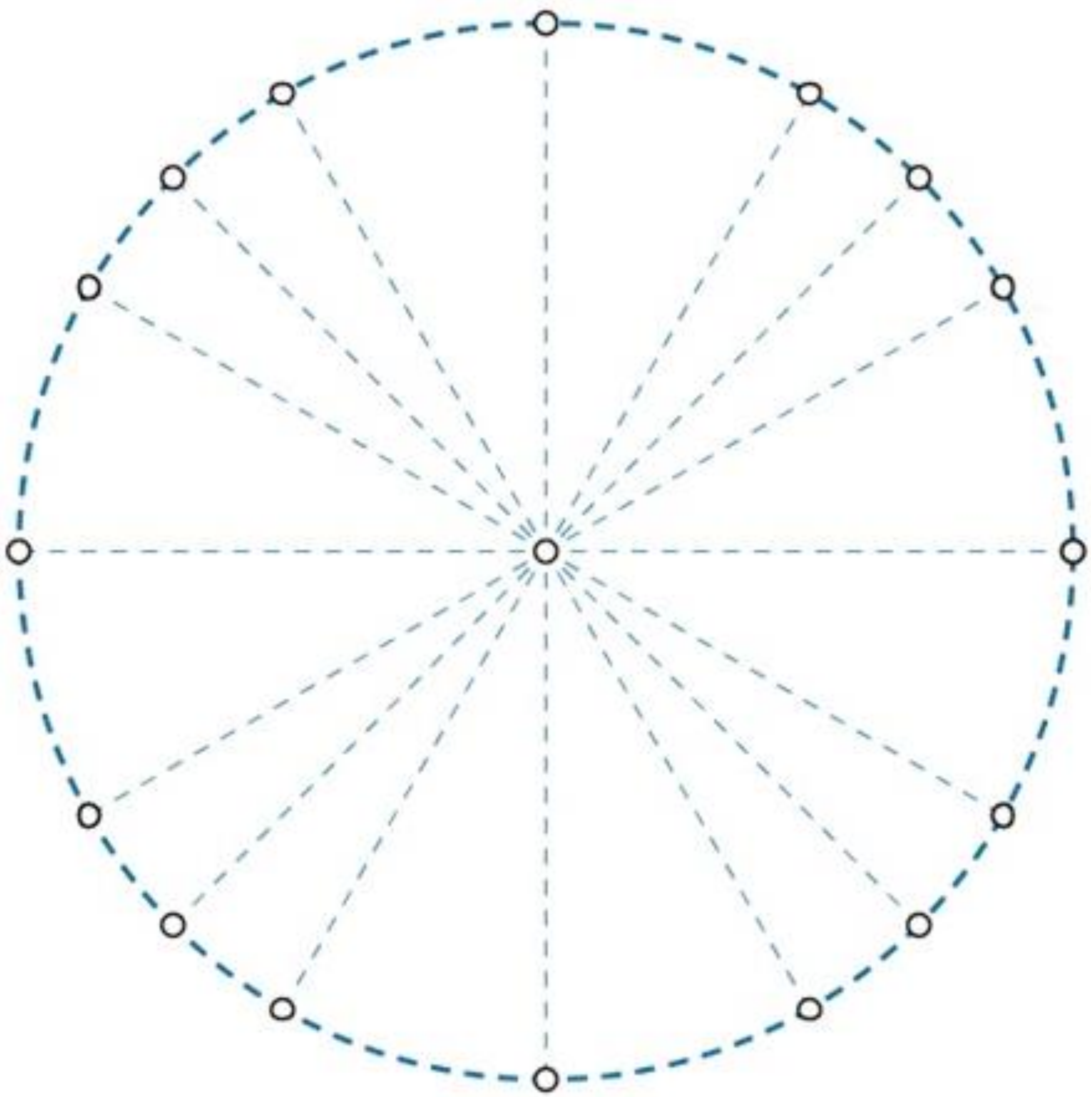
b) Determine los valores de la función seno y coseno:

[1] El contenido de este apartado y la figura 1 y 2, se obtuvieron de: https://www.sutori.com/story/historia-de-la-trigonometria-y-la-medicion-de-angulos--x2eV7wdjMVR8ByA53oB7Eaxc

[2] https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html

	30	45°	60°	90°	180°	225°	270°	315°	360°
y=sen ϴ	½								
x=cos ϴ			½						

3. Construya su propio círculo unitario. Coloque los ángulos y radianes. Personalícelo.



¡Genial! Ha culminado el Tema 1.

TEMA 2. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- ## Identidad

Se llama identidad al enunciado de igualdad que es válido para todos los valores de la variable para los cuales las funciones involucradas en el enunciado están definidas.
Por ejemplo: la ecuación $(x+2)\,(x-2)\ =\ x^2 - 4$ es válida para todo valor de x, por tanto es una identidad.

- ## Identidad Trigonométrica

Una expresión trigonométrica es una identidad trigonométrica. Las identidades trigonométricas se clasifican, de acuerdo a la forma en que han sido deducidas, en tres grupos que son: ***funciones recíprocas, por cociente y relaciones pitagóricas,*** estas se deducen de las seis funciones trigonométricas para desarrollar ocho relaciones fundamentales.

- ## Funciones Recíprocas

Dos funciones son recíprocas cuando su producto es igual a la unidad, es decir.

(1) $sen\theta \,.\, csc\theta = 1$

(2) $cos\theta \,.\, sec\theta = 1$

(3) $tan\theta \,.\, cot\theta = 1$

Demostración:

Tomando como referencia un triángulo rectángulo en el plano cartesiano, como muestra la Figura 3, con catetos de lado $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ e hipotenusa $\boldsymbol{r}$.

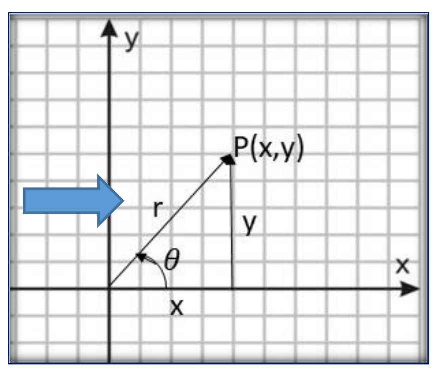


Figura 3. Ángulo en el primer cuadrante

Consideremos la primera función recíproca y la definición de las funciones trigonométricas. Para demostrarla debemos recordar que:

$$\boldsymbol{sen\theta} = \frac{y}{r} = \frac{lado\ opuesto}{hipotenusa}; \quad \boldsymbol{cos\theta} = \frac{r}{y} = \frac{hipotenusa}{lado\ opuesto}$$

Si reemplazamos el $\boldsymbol{sen\theta.csc\theta}$ tenemos que:

$$\boldsymbol{sen\theta.csc\theta} = \frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}$$

Simplificando,

$$\boldsymbol{sen\theta.csc\theta} = \frac{\cancel{y}}{\cancel{r}}\cdot\frac{\cancel{r}}{\cancel{y}} = 1$$

Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\boldsymbol{sen\theta.csc\theta = 1}$$

Ahora, le exhortamos a que haga sus demostraciones de las otras dos funciones recíprocas. ¡Ánimo! Guíese del procedimiento anterior.

Demuestre que cosθ. secθ = 1 aquí↓	***Demuestre que tanθ. cotθ = 1*** aquí↓

Despejando cada una de las relaciones obtenemos:

De $sen\theta . csc\theta = 1$ se obtiene $sen\theta = \frac{1}{csc\theta}$, $csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$

De $cos\theta . sec\theta = 1$ se obtiene $cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$, $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

De $tan\theta . cot\theta = 1$ se obtiene $tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$, $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$

- Relaciones por Cociente

Estas se deducen directamente de las definiciones de las razones trigonométricas:

(4) $tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$ **(5)** $cot\,\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$

Demostración: Usando la figura 3 y la definición de las funciones trigonométricas, tenemos:

Reemplazando,

$$\frac{sen\,\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r}$$

Simplificando,

$$= \frac{y}{\cancel{r}} \cdot \frac{\cancel{r}}{x}$$

$$= \frac{y}{x}$$

Por definición, según la figura 3 $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$

Ahora, le exhortamos a que haga la siguiente demostración. ¡Ánimo!

Demuestre que $cot\,\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$ aquí↓

- ## Relaciones Pitagóricas

Recordando el Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = r^2$ (según la figura 3) y la definición de las funciones trigonométricas se tiene:

Si se dividen en ambos miembros de la igualdad por r^2, obtenemos:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \left(\frac{r}{r}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \text{ (simplificando)}$$

$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$ (definición de $\boldsymbol{sen\theta}$ **y** $\boldsymbol{cos\theta}$)

En forma similar se obtienen las otras dos identidades pitagóricas.

(6) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

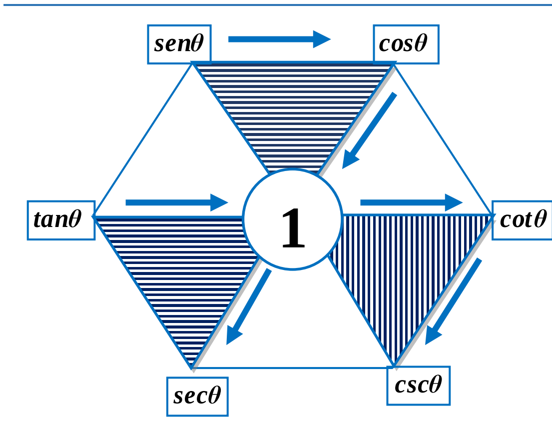
(7) $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

(8) $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

Las ocho relaciones fundamentales son identidades y se pueden usar para deducir otras menos fundamentales.

A continuación, se presenta el hexágono de las identidades, el cual te ayudará para recordar las 8 identidades trigonométricas.

HÉXAGONO DE LAS IDENTIDADES



1. Las dos funciones en la diagonal son recíprocas:

$$sen\theta = \frac{1}{csc\theta} \qquad \Rightarrow \qquad sen\theta \ . \ csc\theta = 1$$

$$cos\theta = \frac{1}{sec\theta} \qquad \Rightarrow \qquad cos\theta \ . \ sec\theta = 1$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta} \qquad \Rightarrow \qquad tan\theta \ . \ cot\theta = 1$$

2. Cualquier función es igual al producto de las funciones que se encuentran en los vértices adyacentes:

$$tan\,\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad sen\theta = tan\,\theta \ . \ cos\theta$$

$$cot\,\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta} \qquad \Rightarrow \qquad cos\theta = cot\,\theta \ . \ sen\theta$$

3. En cada triángulo sombreado, el cuadrado de la función superior izquierda más el cuadrado de la función superior derecha es igual al cuadrado de la función inferior:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \qquad \Rightarrow \qquad cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \ , \ sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$$

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta \qquad \Rightarrow \qquad tan^2\theta = sec^2\theta - 1 \ , \ 1 = sec^2\theta - tan^2\theta$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \qquad \Rightarrow \qquad cot^2\theta = csc^2\theta - 1 \ , \ 1 = csc^2\theta - cot^2\theta$$

Para demostrar que una ecuación es una identidad, consiste en convertir uno de los miembros de la ecuación en la forma que tiene el otro miembro. No hay un método general para demostrar estos ejercicios, pero existen algunas indicaciones que te pueden ayudar.

- Es conveniente trabajar con el miembro más complicado de la identidad reduciéndolo a la forma del miembro más sencillo.

- De ser posible se debe factorizar, a veces es necesario multiplicar el numerador y denominador por un mismo factor, es equivalente a multiplicar por la unidad.

- De no ser posible aplicar ninguna de las indicaciones anteriores, las funciones del miembro más complicado se convierten en senos y cosenos y se simplifica.

Ejemplos:

A- Demuestre que las siguientes expresiones son identidades:

1. $\cos A + \dfrac{sen^2 A}{\cos A} = \sec A$

Solución: Partimos del primer miembro para llegar al segundo que es el más simple, así:

$\cos A + \dfrac{sen^2 A}{\cos A} = \dfrac{cos^2 A + sen^2 A}{\cos A}$ (aplicando suma de fracciones)

$= \dfrac{1}{\cos A}$ (aplicando identidad pitagórica: $sen^2\ A + cos^2\ A = 1$)

$= sec\ A$ (aplicando identidad recíproca: $cos\ A.\ sec\ A = 1$)

2. $\dfrac{1}{1+\cos A} + \dfrac{1}{1-\cos A} = 2\ csc^2\ A$

Solución: Partimos del primer miembro, así:

$\frac{1}{1+\cos A} + \frac{1}{1-\cos A} = \frac{1-cosA+1+cosA}{(1+cosA)(1-\cos A)}$ (suma de fracciones)

$= \frac{2}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$ (reduciendo términos semejantes y cancelando opuestos)

$= \frac{2}{1-cos^2 A}$ (producto de la suma por la diferencia)

$= \frac{2}{sen^2 A}$ (aplicando $\text{sen}^2\text{A} + \cos^2\text{A} = 1$)

$= 2\ \csc^2\text{A}$ (aplicando $\frac{1}{sen\ A} = \text{cscA}$)

3. $\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+sen\ \theta} = \sec\theta$

Solución: Partiendo del primer miembro tenemos:

$\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+sen\ \theta} = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+sen\ \theta}$ (reemplazando $\tan\theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$)

$= \frac{sen\theta(1+sen\theta)+\cos(cos\theta)}{\cos\theta(1+sen\,\theta)}$ (suma de fracciones)

$= \frac{sen\theta+\,sen^2\theta+\,cos^2\theta}{\cos\theta(1+sen\,\theta)}$ (multiplicando término a término en el numerador)

$= \frac{sen\theta+(sen^2\theta+\,cos^2\theta)}{\cos\theta(1+sen\,\theta)}$ (agrupando los dos últimos términos en el numerador)

$= \frac{sen\theta+\,1}{\cos\theta(1+sen\,\theta)}$ $(sen^2\theta +\ cos^2\theta = 1)$

$= \frac{(1+\cancel{sen\theta})}{\cos\theta(1+\cancel{sen\,\theta})}$ (simplificando)

$= \frac{1}{\cos\theta}$

$= \sec\theta$ (usando $\cos\theta\ .\ \sec\theta = 1$)

4. $\text{sen}^2\,\theta\ - \cos^2\theta\ = \text{sen}^4\,\theta\ - \cos^4\theta$

Solución: en este caso partimos del Segundo miembro, pues los términos tienen los exponentes mayores que en el primero.

$\text{sen}^4\,\theta\ - \cos^4\theta = (\text{sen}^2\,\theta\ + \cos^2\theta)(\text{sen}^2\,\theta\ - \cos^2\theta)$ (diferencia de cuadrados)

$= (1)\ (\text{sen}^2\,\theta\ - \cos^2\theta)$ $(\text{sen}^2\,\theta\ + \cos^2\theta = 1)$

$= \text{sen}^2\,\theta\ - \cos^2\theta$ (multiplicando por 1)

ACTIVIDAD N°2

A- Repasemos lo aprendido.

I Parte: Doble alternativa. Escriba V para el enunciado verdadero y F para el falso.

- Las funciones trigonométricas son seis…………………………………………______
- Las identidades fundamentales son ocho……………………………………______
- Las identidades fundamentales se dividen en tres grupos…………______
- Sen A. Csc A = 1 es una función cociente……………………………………______
- $\text{Sen}^2A + \text{Cos}^2A = 1$ es una función recíproca………………………………______

II Parte: Desarrollo. Responda las siguientes preguntas en forma clara.

1) Escriba dos funciones recíprocas: ____________________, __________________________
2) Escriba funciones cocientes: ________________________, ___________________________
3) Escriba dos funciones pitagóricas: ____________________, _________________________

III- Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones es una identidad[3].

1. $(1 + \tan^2\theta)\cos^2\theta = 1$
2. $(1 - \cos^2 A)(1 + \cot^2 A) = 1$
3. $\dfrac{\sec^2 A}{1+\cot^2 A} = \tan^2 A$
4. $\dfrac{1-sen^2 A}{\cot A} = sen\,A\cos A$
5. $\dfrac{1+senA}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{senA} = \dfrac{1+senA}{SenA\cos A}$
6. $\dfrac{1+\csc A}{\cot A} - \dfrac{\cot A}{\csc A} = \dfrac{1+\csc A}{\cot A\csc A}$
7. $\dfrac{\tan A}{\sec A} - \dfrac{\sec A-\cos A}{\tan A} = 0$
8. $\csc^4 A - \cot^4 A = \csc^2 A + \cot^2 A$
9. $\dfrac{\tan A+\sec^3 A-\sec A}{\sec A} = \tan^2 A + senA$
10. $\dfrac{\cos A+sen^3 A-senA}{senA} = \cot A - \cos^2 A$
11. $(\csc A + 1)(\csc A - 1) = \cot^2 A$
12. $\dfrac{1-\cos A}{senA} + \dfrac{senA}{1-\cos A} = 2\csc A$
13. $\dfrac{\tan\theta}{1+\sec\theta} - \dfrac{\tan\theta}{1-\sec\theta} = \dfrac{2}{sen\theta}$
14. $2\csc^2\theta = \dfrac{1}{(1+\cos\theta)} + \dfrac{1}{(1-\cos\theta)}$
15. $\dfrac{sen^2\theta-\cos^2\theta}{1-sen^2\theta} = \tan^2\theta - 1$

¡GENIAL! Ha culminado el tema 2.

[3] Ejercicios de la práctica recopilados de Rees, P. y Sparks, F. (1998). Trigonometría. Reverté Ediciones S.A. de C.V.

TEMA 3. IDENTIDADES DE ÁNGULOS COMPUESTOS

- Identidades para la suma o diferencia de dos ángulos.

También se les conoce como identidades de ángulos compuestos, se refieren a la suma o la diferencia de ángulos, las más comunes son: seno, coseno y tangente.

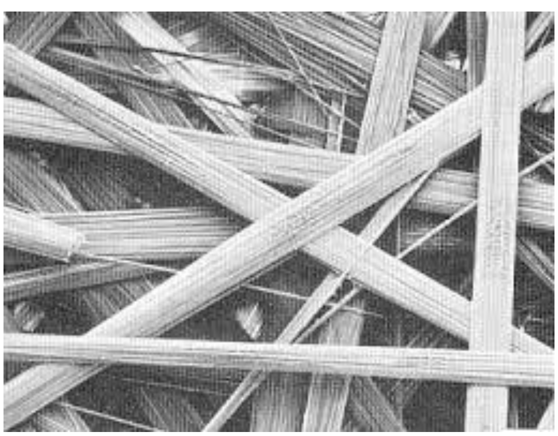
Veamos sus fórmulas:

$$Sen(\propto \pm\beta) = sen \propto . cos\beta \pm cos \propto . sen\beta$$

$$Cos(\propto \pm\beta) = cos \propto . cos\beta \mp sen \propto . sen\beta$$

$$Tan(\propto \pm\beta) = \frac{\tan \propto \pm \tan \beta}{1 \mp tan \propto . tan\beta}$$

Es importante aclarar que cada fórmula esta comprimida y para su manejo adecuado debemos tener en cuenta lo siguiente. Analicemos la primera fórmula:



$$Sen(\propto \pm\beta) = sen \propto . cos\beta \pm cos \propto . sen\beta$$

Si queremos encontrar el seno de la suma de dos ángulos utilizamos.

$$Sen(\propto +\beta) = sen \propto . cos\beta + cos \propto . sen\beta$$

Por otro lado, si buscamos el seno de la resta de dos ángulos se usará,

$$Sen(\propto -\beta) = sen \propto . cos\beta - cos \propto . sen\beta$$

ACTIVIDAD N°3

En esta actividad desarrollaremos el uso adecuado de las fórmulas de identidades de ángulos compuestos.

I- Observe la siguiente fórmula:

$$Cos(\propto \pm\beta) = cos \propto . cos\beta \mp sen \propto . sen\beta$$

1. Escriba el signo que hace falta en la siguiente ecuación y encuentre el Coseno de la suma.

$$Cos(\propto \quad \beta) = cos \propto . cos\beta \quad sen \propto . sen\beta$$

2. Si se quiere encontrar el coseno de esta resta, le invito escribir los signos que hacen falta en la siguiente ecuación:

$$Cos(\propto \quad \beta) = cos \propto . cos\beta \quad sen \propto . sen\beta$$

II- Si se busca la tangente de la suma, ¿cuál es la fórmula que se debe utilizar?

a. $Tan\ (\propto -\beta) = \frac{\tan\propto + \tan\beta}{1 - tan\propto . tan\beta}$

b. $Tan(\propto +\beta) = \frac{\tan\propto + \tan\beta}{1 + tan\propto . tan\beta}$

c. $Tan(\propto +\beta) = \frac{\tan\propto + \tan\beta}{1 - tan\propto . tan\beta}$

III- Escriba la fórmula correcta para encontrar la tangente de la resta de dos ángulos.

Escriba aquí↓

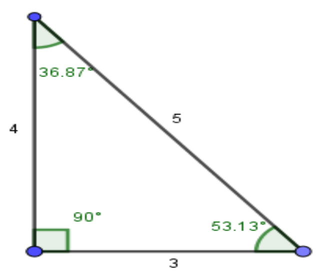
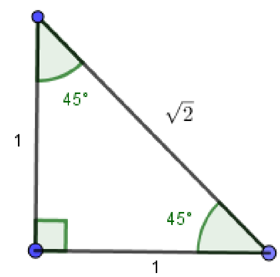
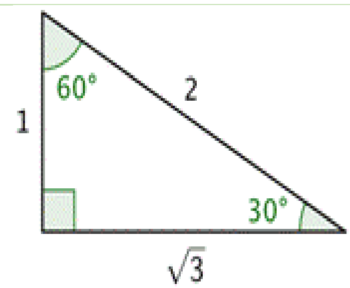
¡GENIAL! Ha culminado el tema 3.

TEMA 4. ÁNGULOS NOTABLES.

Figura 4. Biomuseo Panamá

En nuestro alrededor y en el lugar menos esperado detectamos los ángulos como observamos en la hermosa foto[4] y arquitectura del Biomuseo en Panamá cuya obra resalta formas y figuras geométricas en toda su estructura. Cabe resaltar que los ángulos notables más conocidos. Son: 30°, 37°, 45°, 53° y 60°.

Para poder obtener las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente de cada uno de ellos debemos considerar los siguientes triángulos.

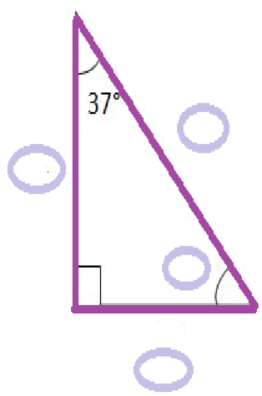
		
$\boldsymbol{sen53° = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{4}{5}}$	$sen45° = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$sen30° = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{1}{2}$
$\boldsymbol{cos53° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{3}{5}}$	$cos45° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$cos30° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{tan53° = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{4}{3}}$	$tan45° = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{1}{1}$	$tan30° = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\boldsymbol{sen37° = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{3}{5}}$		$sen60° = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{cos37° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{4}{5}}$		$cos60° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{1}{2}$
$\boldsymbol{tan37° = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{3}{4}}$		$tan60° = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

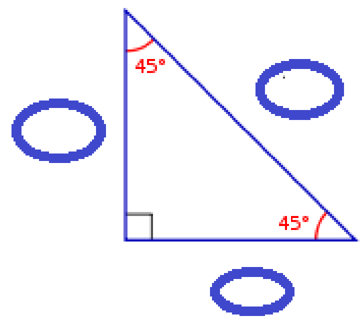
[4] Obtenida de https://www.flickr.com/photos/bernai-velarde/32463472972

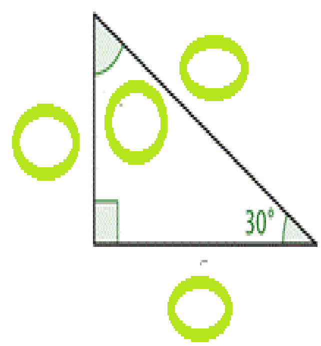
ACTIVIDAD N°4.

I. Triángulos de referencia.

Escriba los valores que hagan falta en cada figura







II. Escriba las razones trigonométricas solicitadas.

$sen53^{\circ} = —$

$cos53^{\circ} = —$

$tan53^{\circ} = —$

$sen37^{\circ} = —$

$cos37^{\circ} = —$

$tan37^{\circ} = —$

$sen45^{\circ} = —$

$cos45^{\circ} = —$

$tan45^{\circ} = —$

$sen30^{\circ} = —$

$cos30^{\circ} = —$

$tan30^{\circ} = —$

$sen60^{\circ} = —$

$cos60^{\circ} = —$

$tan60^{\circ} = —$

¡GENIAL! Ha culminado el tema 4.

TEMA 4.1. USO DE LAS FÓRMULAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

Figura 5. Ciudad de Panamá. Calle 50. Edificio del Tornillo.

Ahora que ha comprendido el uso de las fórmulas de ángulos compuestos y recordado los ángulos notables, estudiemos un poco la aplicación de estos conocimientos en nuestra vida diaria.

En nuestro país encontramos edificios con una construcción muy interesante, como el famoso Edificio "El Tornillo" entre otros. En ellos se realizó un gran trabajo de arquitectura que seguramente utilizó conocimientos de trigonometría como los que vamos a analizar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo1: Vamos a encontrar el coseno de 75° sin el uso de calculadora. Y para ello utilizaremos los ángulos notables, es decir, las razones de aquellos ángulos conocidos como los son 30°, 45°, 60°, 37° y 53°.

Primero: podemos observar que 75° se puede escribir como la suma de dos de los ángulos notables, ellos son 30° + 45°.

Segundo: consideramos a $\propto = 30°\, y\ \beta = 45°$

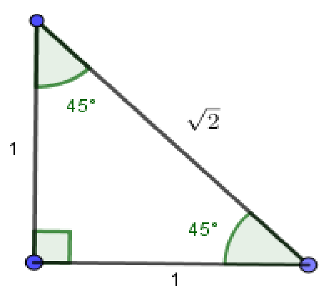
Tercero: encontramos el cos 75° mediante la fórmula:

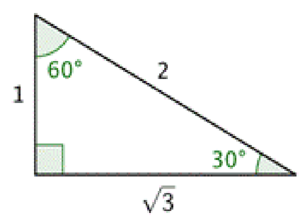
$$Cos(\propto + \beta) = cos \propto . cos\beta - sen \propto . sen\beta$$

Cuarto: remplazando tenemos que:

$$Cos(30° + 45°) = cos30°. cos45° - sen30°. sen45°$$

- ## Repasemos los siguientes conceptos:





$$\boldsymbol{sen45° = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos45° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$cos30° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen30° = \frac{Opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$

Observación: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, racionalizando $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego de repasar que:

$$\boldsymbol{sen30° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \boldsymbol{cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Podemos retomar el proceso de solución.

$$\boldsymbol{cos(30° + 45°) = (cos30° \cdot cos45°) - (sen30° \cdot sen45°)}$$

$\boldsymbol{cos(30° + 45°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$	Reemplazamos el cos30°, el sen30°, el cos45° y el sen45° por sus razones correspondientes.
$\boldsymbol{cos(30° + 45°) = \left(\frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{2 \cdot 2}\right) - \left(\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2}\right)}$	Se multiplican las fracciones.
$\boldsymbol{cos(30° + 45°) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$	Escribimos los resultados de la multiplicación.
$\boldsymbol{cos(75°) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$	Encontramos la resta de las fracciones homogéneas.

Ejemplo 2: Encuentre el cos 16°.

Comenzamos buscando una relación de suma o resta de los ángulos notables que nos de 16°; podemos considerar a 53° y 37° cuya resta es 16°, entonces podemos decir que:

$$\propto = 53° \; y \; \beta = 37°$$

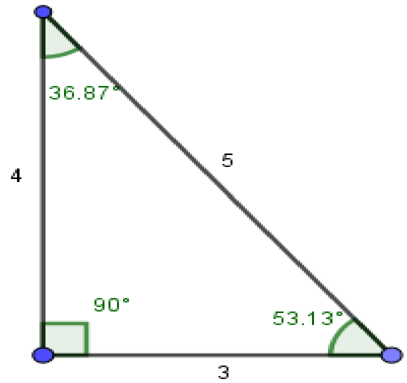
Entonces utilizaremos la fórmula del coseno de la resta de dos ángulos, es decir:

$$Cos(\propto - \beta) = cos \propto . cos\beta + sen \propto . sen\beta$$

Considerando a $\propto = 53° \; y \; \beta = 37°$ tendremos:

$$Cos(53° - 37°) = cos53°. cos37° + sen53. sen37°$$

- Repasemos los siguientes conceptos:



$$cos37° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{4}{5}$$

$$sen37° = \frac{Opuesto}{hipotenusa} = \frac{3}{5}$$

$$sen53° = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{4}{5}$$

$$cos53° = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{3}{5}$$

Podemos retomar el proceso de la solución

$$Cos(53° - 37°) = cos53° \cdot cos37° + sen53 \cdot sen37°$$

$Cos(53° - 37°) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}\right)$	Reemplazamos los valores de las razones correspondientes a cada ángulo.
$Cos(53° - 37°) = \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$	Se multiplican las fracciones según se indica.
$Cos(53° - 37°) = \frac{24}{25}$	Luego se efectúa la suma de las fracciones dando este resultado por ser homogéneas.
$Cos(16°) = \frac{24}{25}$	

Ejemplo 3: encontremos la sec16°

Sabiendo que la $sec\ \theta = \frac{1}{\cos\theta}$ entonces podemos asegurar que la $sec16° = \frac{1}{\cos 16°}$,
Puesto que hemos calculado en el *ejemplo 2* el cos16° y encontramos que es igual a $\frac{24}{25}$
Podemos resolver este ejemplo tomando esa información de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{sec16° = \frac{1}{\cos 16°}}$$

$$\boldsymbol{sec16° = \frac{1}{24/_{25}}}$$

Remplazamos el coseno de 16°.

$$\boldsymbol{sec16° = (1)\left(\frac{25}{24}\right)}$$

Por ser una división de un entero entre una fracción no queda un producto del numerador por el reciproco del denominador.

$$\boldsymbol{sec16° = \frac{25}{24}}$$

Luego de multiplicar se obtenemos la solución .

Ejemplo 4: encontrar la tangente de 8°.

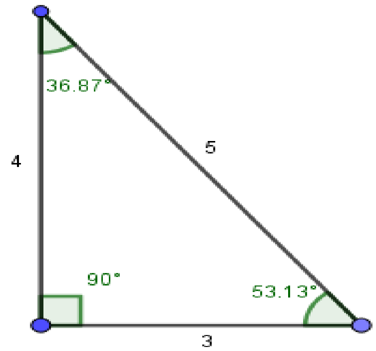
Podemos encontrar que 8° es igual a la resta de los ángulos notables 53° menos 45°
Entonces podemos utilizar la fórmula.

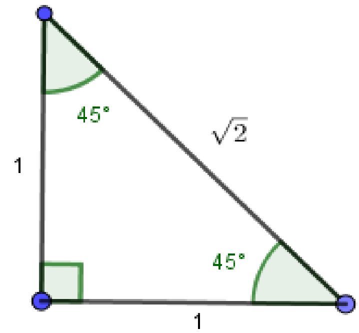
$$Tan(\propto - \beta) = \frac{\tan \propto - \tan\beta}{1 + tan \propto . tan\beta}$$

$$Tan(53° - 45°) = \frac{\tan 53° - \tan 45°}{1 + tan53° \cdot tan45°}$$

Escriba sus anotaciones aquí↓

- Repasemos los siguientes conceptos:





$$tan\ 53° = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{4}{3}$$

$$tan\ 45° = \frac{Opuesto}{Adyacente} = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora que hemos recordado cómo obtener los datos necesarios, procedemos a resolver.

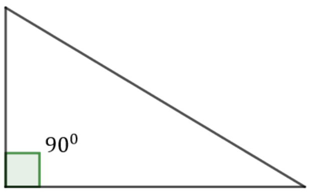
$Tan(53° - 45°) = \frac{\tan 53° - \tan 45°}{1 + tan53° \cdot tan45°}$	
$Tan(53° - 45°) = \frac{\frac{4}{3} - 1}{1 + \left(\frac{4}{3} \cdot 1\right)}$	En el numerador se resuelve la resta indicada: $\frac{4}{3} - 1 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$ Mientras que en el denominador, por el momento solo resolvemos la multiplicación indicada: $\frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$
$Tan(53° - 45°) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)}$	En este momento podemos realizar la suma expresada en el denominador. $1 + \frac{4}{3} = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$
$Tan(53° - 45°) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}$	Ahora por ser una división de fracciones, se resuelve el producto del numerador por el recíproco del denominador y sabiendo que ahora se puede simplificar, se tiene: $\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{7} = \frac{1}{7}$
$Tan(53° - 45°) = \frac{1}{7}$	

¡GENIAL! Ha culminado el tema 4.

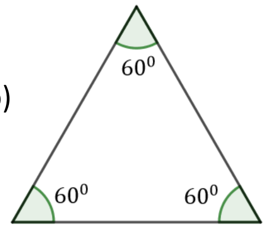
ACTIVIDAD DE AUTOEVALUACIÓN

I. Observe los siguientes triángulos. Encierre la letra que muestra un triángulo rectángulo; en los que son triángulos rectángulos identifica los catetos y la hipotenusa, nombrando con “h” a la hipotenusa y con “a” y “b” a los catetos.

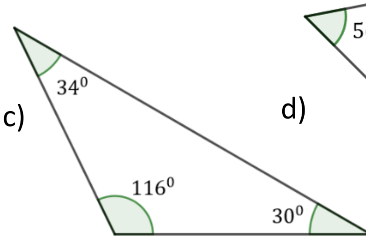
a)



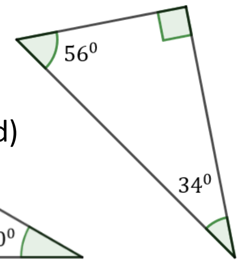
b)



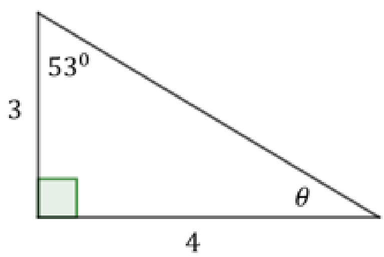
c)

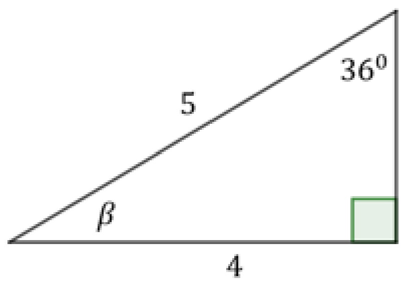


d)



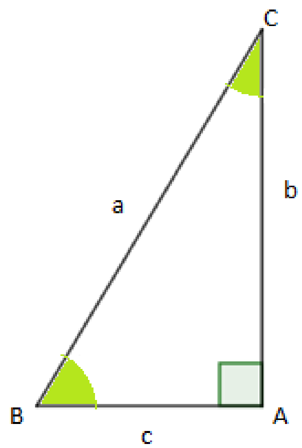
II- En los triángulos rectángulos siguientes, encuentra el valor del lado y el ángulo faltante





Escriba sus apuntes aquí↓

III- En el siguiente ejercicio escribe los valores de cada función trigonométrica, dado el siguiente triángulo con respecto al ángulo B:



$sen\ B = —$ $\quad$ $\cot B = —$

$\cos B = —$ $\quad$ $\sec B = —$

IV- Uso de las identidades de ángulos compuestos. Estos cálculos se deben hacer sin el uso de calculadora.

1. Encuentre el coseno para 97°

2. Halla el valor de tan 75°

3. Busca a cuánto equivale el sen 15°

4. Cuál es el valor de tan 23°

5. El sen 83° es equivalente a

V- Demuestre que las siguientes igualdades son identidades. Escriba el miembro del cual parte para hacer la demostración. No olvide escribir el ángulo.

a) $(sen\,A\cos B + \cos A\, sen\,B)\,(\cos A\cos B + sen\,A\, sen\,B) = sen\,A\cos A + sen\,B\cos B$

b) $\dfrac{1 + sen\,y}{1 - sen\,y} - \dfrac{\sec y - \tan y}{\sec y + \tan y} = \dfrac{4\csc y}{csc^2 y - 1}$

2 | ALGEBRA

TEMA 5. MATRICES

- ### Matrices

Las matrices son herramientas fundamentales en las matemáticas puras y aplicadas, y cada vez más importantes en las ciencias físicas biológicas y sociales. Una de las principales aplicaciones de las matrices es la representación del sistema de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

Una matriz es un arreglo en filas y columnas de números reales. Si la matriz tiene $\boldsymbol{m}$ **filas** y $\boldsymbol{n}$ **columnas** (m y n enteros positivos), entonces la matriz es de orden m x n. Si $m \neq n$, la matriz se llama matriz rectangular, y si $m = n$, la matriz se llama matriz cuadrada de orden n.

Por ejemplo, la matriz A tiene dos filas y tres columnas, es una matriz 2 X 3.

$$\begin{array}{ccc} & \text{3 Columnas} & \\ A= & \begin{bmatrix} 5 & 2 & 16 \\ 4 & 3 & 10 \end{bmatrix} & \text{2 Filas} \end{array}$$

En cambio, la matriz B tiene tres filas y dos columnas, es una matriz 3 x 2.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 12 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

SABÍAS QUE...

En la Electrónica el comportamiento de muchos componentes electrónicos puede ser descrito utilizando matrices. Otras aplicaciones es la construcción de carteles basados en una matriz de diodo de nxn

En la electricidad las matrices son usadas en la solución de circuitos eléctricos, el análisis de los circuitos RC, análisis de circuitos RC sin fuentes. De igual manera en la aplicación del método de solución circuital y nodal por medio de matrices de impedancia y admitancia[5].

[5] Obtenido de: https://www.slideshare.net/GizehRodriguez/matrices-en-la-vida-cotidiana

- ## Simbología y elementos de una matriz

Simbolizamos las matrices con las letras mayúsculas del abecedario A, B, C, …. Un elemento de la matriz es simplemente una entrada de la matriz. Cada elemento en una matriz se identifica al nombrar la fila y la columna en los cuales aparece. Por ejemplo, considera la matriz C, para nombrar sus elementos usamos la simbología cij siendo **i** la fila y **j** la columna.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 2 & 10 & -10 \\ -4 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz C es una matriz 3 x 3 con c_{13}= 16

c_{13}= 16 Indica el elemento que ocupa la primera fila y la tercera columna.

c_{32}= 12 Indica el elemento que ocupa la tercera fila y la segunda columna.

- ## Solución de sistemas de ecuaciones por medio de matrices

Las matrices se pueden utilizar para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, lo primero que hacemos es escribir el sistema de ecuaciones en forma de matriz ampliada. Luego, realizamos algunas transformaciones de la matriz con sistemas equivalentes, similar al método de reducción, Pero utilizando únicamente los coeficientes.

Ejemplo 1: Un autobús dedicado a los viajes de turismo interno en la ciudad de Panamá cuenta con dos pisos. En el primer piso cuenta con 25 asientos y en el segundo piso con 30. Si se logra ubicar todos los asientos en ambos pisos el ingreso total será de B/. 1525.00. En el último viaje realizado solo se logró ubicar 15 asientos en el primer piso y 21 en el segundo con un ingreso de B/. 1005.00. ¿Cuál es el precio de un asiento de cada piso?

Solución:

Se plantea el sistema de ecuaciones:

- ✓ Sea A el precio de los asientos del primer piso y B el precio de los asientos del segundo piso. Entonces:

$$\begin{cases} 25A + 30B = 1525 \\ 15A + 21B = 1005 \end{cases}$$

Solucionaremos este problema, utilizando matriz de coeficientes.

Paso 1: Escribimos el sistema como matriz de coeficientes ampliada y lo que resulta:

$$\begin{bmatrix} 25 & 30 & 1525 \\ 15 & 21 & 1005 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Para hallar el valor de una de las variables, dividimos la fila 1 entre 5 (porque todos los números son múltiplos de 5) y la segunda entre 3, resultando:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 305 \\ 5 & 7 & 335 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Multiplicamos la segunda fila por (-1) para que el 5 de la segunda fila se convierta en el inverso aditivo de 5 en la primera fila:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 305 \\ -5 & -7 & -335 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Sumamos la primera fila y la segunda fila:

$$0 \quad -1 \quad -30$$

Paso 5: Volviendo a escribir la segunda fila como ecuación, obtenemos:

$$-B = -30$$
$$B = 30$$

Reemplazando el valor de B=30 en la primera ecuación tenemos:

$$25A + 30B = 1525$$
$$25A + 30(30) = 1525$$
$$25A + 900 = 1525$$
$$25A = 1525 - 900$$
$$25A = 625$$
$$A = 25$$

Respuesta: Un asiento del primer piso tiene un costo de B/. 25 y del segundo piso B/. 30

Cabe mencionar, que las matrices ampliadas son una forma abreviada de escribir sistemas de ecuaciones. En una matriz ampliada, cada renglón representa una ecuación en el sistema de ecuaciones y cada columna representa una variable o los términos constantes.

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} 25A + 30B = 1525 \\ 15A + 21B = 1005 \end{cases}$

Matriz ampliada:

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 25 & 30 & 1525 \\ 15 & 21 & 1005 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{Ecuación 1} \\ \leftarrow \text{Ecuación 2} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A & B & constantes \end{array} & \end{array}$$

ACTIVIDAD N°5.

Soluciona los siguientes sistemas por el método de matriz ampliada:

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3\,x + y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ -3\,x + 2y = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9\,x + 8y = 13 \end{cases}$

Realice sus operaciones aquí

3 | GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA 6. ECUACIÓN DE LA RECTA

- ### Formas de la Ecuación de una recta y pendiente

La pendiente de una recta es una medida de su inclinación. Matemáticamente, la pendiente se calcula como "desplazamiento vertical entre el desplazamiento horizontal" [cambio en $\boldsymbol{y}$ (ye) dividido entre el cambio en $\boldsymbol{x}$ (equis)].

¿Qué es la pendiente?
La pendiente es una medida de la inclinación de una recta.

$$Pendiente = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal} = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}$$

Para profundizar, en la definición de la pendiente, te recomendamos que observes el siguiente video[1]. Accede aquí o copia la dirección https://youtu.be/jpIOnLHIxrg

Ejemplo 1: **Dada la gráfica de una recta, determine su pendiente. Observe la Figura 4.**

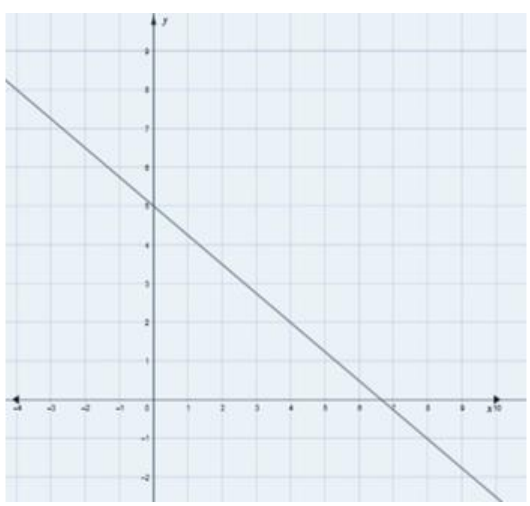


Figura 4.

[6] Obtenido de Khan Academy.

Solución:

Para determinar la pendiente, marquemos dos puntos por donde pasa la recta, pueden ser $(0{,}5)$ y $(4{,}2)$.

Observe $(0{,}5)$ y $(4{,}2)$ en la Figura 5:

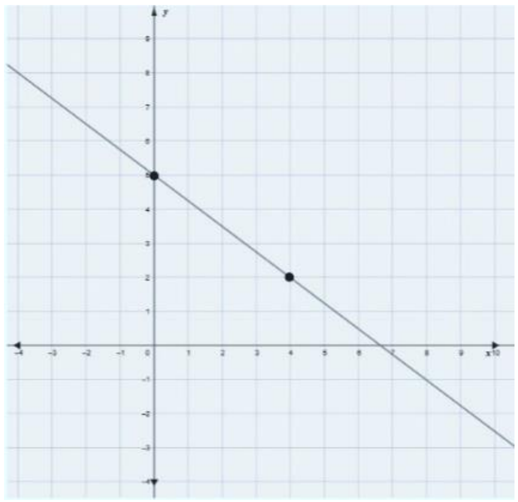


Figura 5

$$Pendiente = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal} = \frac{2-5}{4-0} = \frac{-3}{4} \quad = -\,\frac{3}{4}$$

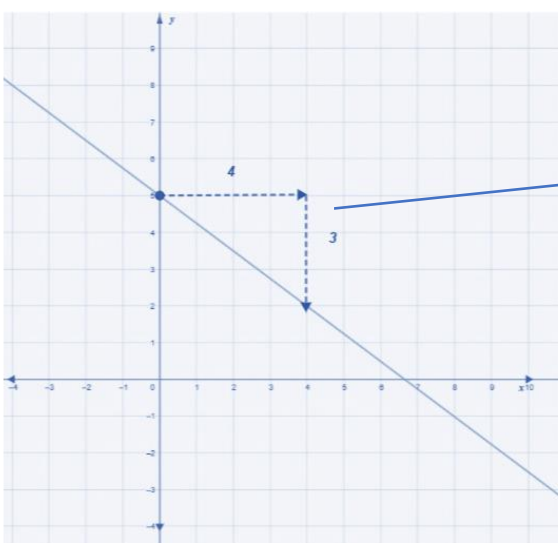


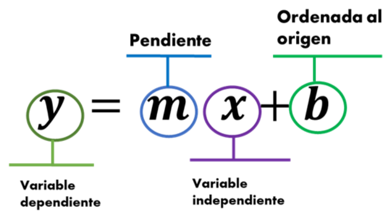
Figura 6

Observe que en la Figura 6 que, por cada tres unidades que nos movemos verticalmente hacia abajo de la recta, nos movemos horizontalmente cuatro unidades a la derecha.

• Forma pendiente ordenada al origen

Ahora que hemos repasado el concepto de pendiente veremos las diferentes formas de la ecuación de la recta:

La forma *pendiente-ordenada al origen* es una representación específica de las ecuaciones lineales y tiene la siguiente estructura de $\boldsymbol{y = m\,x + b}$



En la ecuación anterior, $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ pueden ser números reales cualesquiera. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones lineales corresponden a la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\boldsymbol{y = 4\,x - 6}$$
$$\boldsymbol{y = -8\,x + 3{,}5}$$
$$\boldsymbol{y = 12 - 144\,x}$$

Por otro lado, las ecuaciones lineales a continuación no están expresadas en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\boldsymbol{3x + 5y = 2}$$
$$\boldsymbol{y - 5 = 3(x - 2)}$$
$$\boldsymbol{x = 3x - 9}$$

La forma pendiente-ordenada al origen es la más destacada de las representaciones que hay para las ecuaciones lineales. Por las siguientes razones a mencionar:

La forma pendiente-ordenada al origen tiene la ventaja de que exhibe las dos características principales de la recta que representa:

- La pendiente es $\boldsymbol{m}$
- La coordenada $\boldsymbol{y}$ de la intersección con el eje $\boldsymbol{y}$ es $\boldsymbol{b}$. Es decir, la recta se interseca con el eje en $(0, \boldsymbol{b})$

Por ejemplo, la recta $\boldsymbol{y = 4\,x - 6}$ tiene pendiente $\boldsymbol{4}$ y se interseca con el eje $\boldsymbol{y}$ en: $(\,0, -6\,)$.

Como podemos ver, en la Figura 7, esta representación da la pendiente y la ordenada al origen (es decir, la intersección de la recta con el eje y) y es la razón por la cual se llama forma pendiente-ordenada al origen.

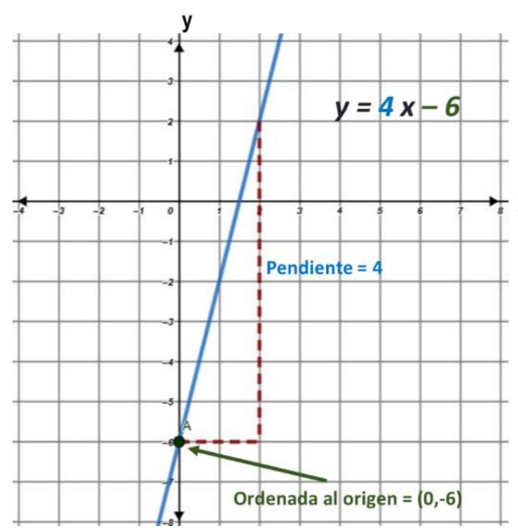


Figura 7

Ejemplo 2: ¿Cuál es la pendiente de la recta representada por $\boldsymbol{y = 3x + 5}$?

Solución:

Recuerda que en la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$, la pendiente está dada por $\boldsymbol{m}$.

Por tanto $\boldsymbol{y = 3x + 5}$ tiene una pendiente de 3.

Ejemplo 3: ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta representada por

$\boldsymbol{y = -5x - 8?}$

Solución:

- En la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$ la ordenada al origen está dada por $\boldsymbol{b}$.
- En la intersección con el eje $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ siempre es igual a cero.
- Por lo tanto, $\boldsymbol{y = -5x - 8}$ se interseca con el eje $\boldsymbol{y}$ en el punto $(0, -8)$

Ejemplo 4: ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta representada por $\boldsymbol{y = 7x}$?

Solución:

Recuerde que en la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$ la ordenada al origen está dada por $\boldsymbol{b}$. Si el término $\boldsymbol{b}$ no aparece, eso quiere decir que $\boldsymbol{b}$ es igual a cero. De otra manera, podemos escribir la ecuación dada como:

$$\boldsymbol{y = 7x + 0.}$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{y = 7x + 0}$ se interseca con el eje $\boldsymbol{y}$ en el punto $(0,0)$.

Ejemplo 5: ¿Cuál es la pendiente de la recta representada por $\boldsymbol{y = 2 - 4x?}$

Solución:

Recuerda que en la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$, la pendiente está dada por $\boldsymbol{m}$.
Por tanto $\boldsymbol{y = 2 - 4x}$ tiene una pendiente de $\boldsymbol{-4}$.

Realice sus operaciones aquí

ACTIVIDAD N°6.1

A. Repasemos lo aprendido.

I Parte. Seleccione con un gancho √ la respuesta correcta.

1) ¿Cuáles rectas se intersecan con el eje $\boldsymbol{y}$ en el punto (0, 3)?

- ☐ $\boldsymbol{y = -4x + 3}$
- ☐ $\boldsymbol{y = 3x + 2}$
- ☐ $\boldsymbol{y = 6 + 3x}$
- ☐ $\boldsymbol{y = 3 - x}$

2) ¿Cómo encontramos la pendiente de una recta que está dada en forma pendiente-ordenada al origen?

- ☐ La pendiente es el primer número que aparece en la ecuación
- ☐ La pendiente es el coeficiente que multiplica a $\boldsymbol{x}$, sin importar el orden en el que aparece.

II Parte. Responda de acuerdo con lo solicitado.

1) Escriba la ecuación de una recta cuya pendiente es 9 y se interseca con el eje $\boldsymbol{y}$ en $(0, -12)$.
2) ¿Cuál es el punto de intersección de la recta $y = -7x - 2$ con el eje y?
3) ¿Cuál es la pendiente de $y = -15$?
4) ¿Cuál es la pendiente de $y = 6x - 11$?

Realice sus operaciones aquí

- ## Forma Punto-Pendiente

La forma punto-pendiente es una forma específica de ecuaciones lineales en dos variables:

$$\boldsymbol{y - b = m(x - a)}$$

Cuando una ecuación está escrita en la forma punto-pendiente, m da la pendiente de la recta y el punto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ es un punto por donde pasa la recta. Esta forma se deriva de la fórmula de la pendiente.

Para profundizar, en la definición punto-pendiente, le recomendamos observar el siguiente video[2]. Acceda aquí o copie la dirección **https://youtu.be/tsv4KJ-9ais**

Encontraremos la ecuación punto-pendiente a partir de sus características o su gráfica.

a) La ecuación a partir de la pendiente y un punto.

Ejemplo 1: Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(2, 7)$ y cuya pendiente es -3.

Solución:

[7] Obtenido de Khan Academy.

Para ello sustituimos $m = -3$, $a = 2$ y $b = 7$ en la forma punto-pendiente y graficamos.

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 7 = -3(x - 2)$$

$$y - 7 = -3x + 6$$

$$y = -3x + 6 + 7$$

$$y = -3x + 13$$

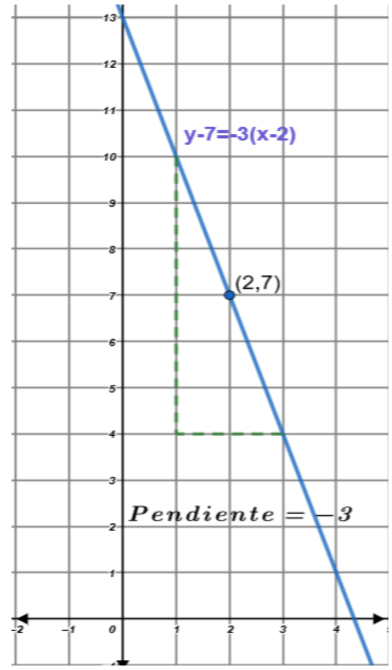


Figura 8

b) La ecuación a partir de dos puntos.

Ejemplo 2: Determinar la recta que pasa por los puntos $(4, 3)$ y $(5, 7)$.

Solución: Para hallar la solución, primero usamos los dos puntos para encontrar la pendiente:

$$Pendiente = \;= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-3}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$$

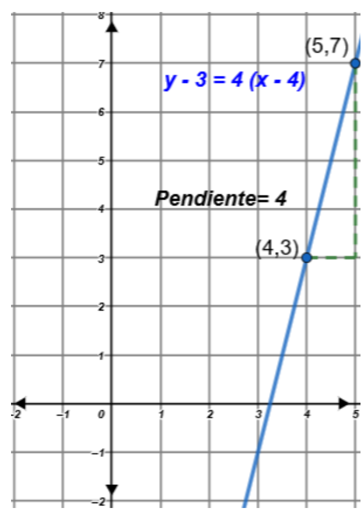


Figura 9

Ahora usamos uno de los puntos, tomaremos $(4,3)$, y escribimos la ecuación en la forma punto-pendiente.

$$y - b = m(x - a)$$

$$y - 3 = 4(x - 4)$$

$$y = 4x - 16 + 3$$

$$y = 4x - 13$$

c) Forma punto-pendiente.

Ejemplo 3: Observe la gráfica y determine la ecuación en la forma punto-pendiente a partir de dos puntos.

Solución:

Para realizar esta actividad necesitamos un punto y la pendiente que encontraremos a través de la representación gráfica que nos dan.

Para ello seleccionamos un punto por donde pasa la recta, escogeremos $(4, 3)$ y la pendiente la determinamos de forma gráfica seleccionando dos puntos por donde pasa la gráfica, escogeremos $(4{,}3)$ y $(2, -1)$ como muestra la Figura 10.

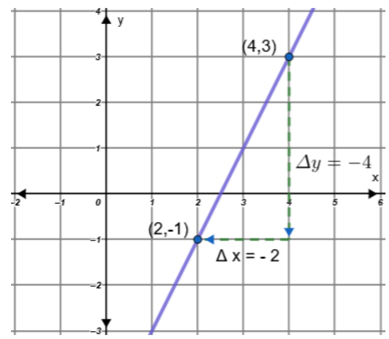


Figura 10. Representación gráfica

- ✓ **A partir de dos puntos.**

Seleccionaremos los puntos $(4, 3)$ y $(2, -1)$ para determinar la pendiente de forma algorítmica:

$$Pendiente = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{-1-3}{2-4} = \frac{-4}{-2} \quad = +2 = 2$$

Escogemos un punto de los anteriores para escribir la ecuación:

$\boldsymbol{y - b = m\,(x - a)}$

$\boldsymbol{y - 3 = 2\,(x - 4)}$

$\boldsymbol{y = 2x - 8 + 3}$

$\boldsymbol{y = 2x - 5}$

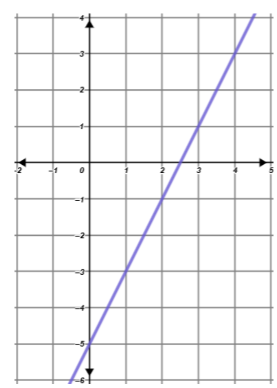


Figura 11

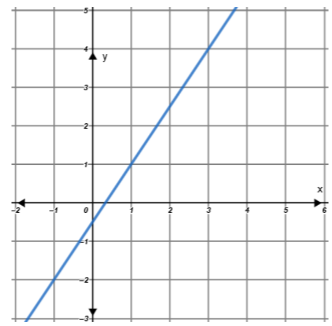
ACTIVIDAD N°6.2.

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(5, -2)$ y $(1, -3)$ en la forma punto-pendiente.
2. Dada la siguiente gráfica determine la ecuación de la recta de la forma punto-pendiente.
3. Tenemos la ecuación de la forma punto-pendiente $y - 9 = -4\,(x - 4)$ identifique el punto (a, b) y la pendiente.

4. Necesitamos determinar la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente que pasa por $(5, -3)$ y tiene pendiente -7. ¿Cómo lo haría?
5. ¿Cuál es la pendiente de la recta $y - 8 = 11\,(x - 1)$?

¿Por cuál punto pasa la recta? Seleccione con un gancho $\surd$ la respuesta correcta.

- ☐ $(8{,}1)$
- ☐ $(-1, -8)$
- ☐ $(1, 8)$
- ☐ $(-8, -1)$
- ☐ $(8, 11)$
- ☐ $(11, 1)$



Forma estándar de la recta

La forma estándar de las ecuaciones lineales de dos variables es:

$$ax + by = c$$

Generalmente en esta forma, a, b y c son todos enteros.

Para profundizar, en la forma estándar de la recta, le recomendamos observar el siguiente video[2]. Acceda aquí en el icono o copie la dirección **https://youtu.be/utUMbgmOm30**

Cuando tenemos una ecuación lineal en forma estándar, podemos encontrar sus intersecciones con los ejes x y y. Esto también nos permite graficarla.

Observemos la ecuación $2x + 3y = 12$.
Si hacemos $x = 0$, obtenemos la ecuación $3y = 12$, y rápidamente podemos decir que:
$y = 4$, lo que significa que la intersección con el eje y es $(0{,}4)$.

De manera similar, podemos hacer $y = 0$ para obtener $2x = 12$ y encontrar que la intersección con el eje x es $(6{,}0)$.

Ahora podemos graficar la recta.

Lo dicho anteriormente se resume en la siguiente tabla:

Ecuación	Valor para x	Valor para y	Sustitución	Punto
$2x + 3y = 12$	0	3	$2(0) + 3y = 12$ $3y = 12$ $y = \frac{12}{3}$ $y = 3$	$(0{,}3)$
	6	0	$2x + 3(0) = 12$ $2x = 12$ $y = \frac{12}{2}$ $y = 6$	$(6{,}0)$

La gráfica que resulta es la siguiente:

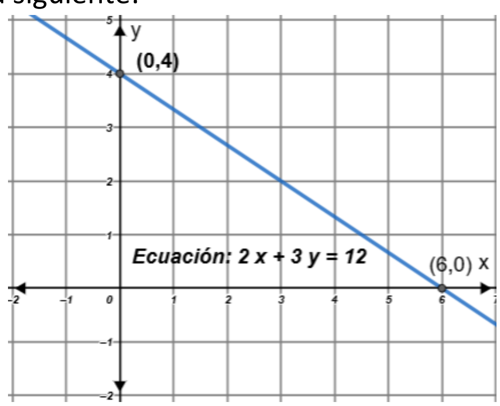


Figura 12

Ejemplo 1: ¿Cuál es la intersección de la recta $3x - 6y = 12$ con el eje x?

Solución:

Para encontrar la intersección con el eje x haremos $y = 0$, podemos decir:

$$3x - 6y = 12$$
$$3x - 6(0) = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Lo que significa que la intersección con el eje x es $(4{,}0)$.

¿Cuál es la intersección con el eje y?

Para encontrar la intersección con el eje y haremos $x = 0$, podemos decir:

$$3x - 6y = 12$$
$$3(0) - 6\,y = 12$$
$$-6y = 12$$
$$y = \frac{12}{-6}$$
$$y = -2$$

Lo que significa que la intersección con el eje y es $(0, -2)$.

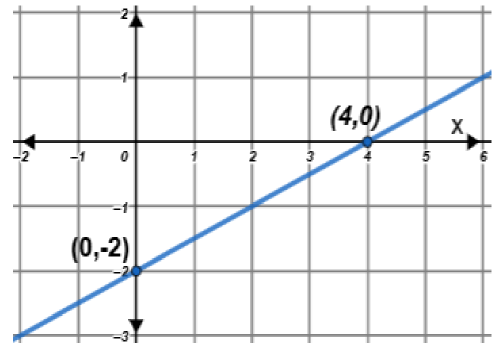


Figura 13

Ejemplo 2: ¿Qué es $y - 5 = 13\,(\,x - 2)$ escrito en forma estándar?

Solución:

En algunos casos, como al resolver sistema de ecuaciones, podríamos querer convertir una ecuación escrita de manera distinta para ponerla en la forma estándar. Convertiremos la ecuación $y - 5 = 13\,(\,x - 2)$ a la forma estándar:

$$y - 5 = 13\,(\,x - 2)$$
$$y - 5 = 13\,x - 26 \qquad \textit{Multiplique 13 por el binomio}$$
$$y - 13\,x = +5 - 26 \qquad \textit{Ponga todas las variables de un lado}$$
$$\mathbf{-13\,x + y = -21}$$

Ejemplo 3: Convierta la ecuación $y = \frac{2}{7}\,x + 9$ a la forma estándar.

Solución:

$$y = \frac{2}{7}\,x + 9$$

$-\frac{2}{7}\,x + y = +9$ Ponga las variables de un lado

$\mathbf{-2\,x + 7\,y = 63}$

Realice sus operaciones aquí

ACTIVIDAD N°6.3

1. ¿Cómo se escribe $y = -3x - \frac{2}{9}$ en la forma estándar?

   Escoja una respuesta:

   - ☐ $3x + y = -3$
   - ☐ $9\,y = -18\,x - 3$
   - ☐ $27\,x + 9\,y = -3$
   - ☐ $9\,x + 9\,y = 3$

2. ¿Cuál es la intersección de la recta $7x - 3y = -21$ con el eje x y con el eje y?
3. ¿Qué es $y + 8 = -3(x + 5)$ escrito en forma estándar?
4. Grafique $-5x + 3\,y = 15$

Realice sus operaciones aquí

Forma general de la recta

La forma general de la recta es $ax + by + c = 0$ donde a, b y c son números reales.
La forma general de la ecuación de una recta contempla tanto a las rectas verticales como a las que no lo son. De la ecuación general se puede despejar y de tal manera que se puede determinar la forma pendiente-ordenada al origen así:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{ax + by + c = 0} \\ \boldsymbol{by = -ax - c} \\ \boldsymbol{y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}}\end{gathered}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta sería $\boldsymbol{m = -\frac{a}{b}}$ y la intersección con el eje y $(\mathbf{0}, -\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}})$.

Ejemplo 1: ¿Cuál es la forma general de la ecuación $\boldsymbol{y = 5x + 3}$?

Solución:

Para expresar $y = 5x + 3$ en la forma general de la recta basta con pasar todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{y = 5x + 3} \\ \boldsymbol{-5x + y - 3 = 0} \\ \boldsymbol{5x - y + 3 = 0} \quad \text{Multiplicando por -1}\end{gathered}$$

Ejemplo 2: ¿Cuál es la forma general de la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 2)$ y tiene pendiente 6?

Solución:
Con los datos que nos proporcionan podemos escribir la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente para luego escribirla en su forma general así:

$\boldsymbol{y - 3 = 2\,(x - 4)}$ $\quad$ $Se\ expresa\ de\ la\ forma\ punto - pendiente.$

$\boldsymbol{y - 3 = 2x - 8}$ $\quad$ $Multiplicación\ de\ las\ expresiones\ algebraicas.$

$\boldsymbol{-2x + y - 3 + 8 = 0}$ $\quad$ $Se\ pasan\ todos\ los\ términos\ a\ un\ lado\ de\ la\ ecuación$
$y\ \ se\ reducen\ los\ términos\ semejantes.$

$\boldsymbol{-2x + y + 5 = 0}$ $\quad$ $Se\ multiplica\ por\ -1$

$\boldsymbol{2x - y - 5 = 0}$ $\quad$ $Forma\ general\ de\ la\ recta$

Ejemplo 3: ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen de la recta $x + 3y - 9 = 0$?

Solución:
En la actividad introductoria realizamos el despeje y encontramos que $\boldsymbol{m = -\frac{a}{b}}$ y la intersección con el eje y $\boldsymbol{(0, -\frac{c}{b})}$. Primeramente, identificamos $a = 1,\ b = 3$ y $c = -9$ para sustituirlo así:

$\boldsymbol{m = -\frac{a}{b}}$

$\boldsymbol{m = -\frac{1}{3}}$ $\quad$ Pendiente

$\boldsymbol{(0, -\frac{c}{b}) = (0, -\frac{-9}{3}) = (0, -\frac{-9}{3}) = (0, 3)}$ $\quad$ Ordenada al origen.

ACTIVIDAD N°6.4

1. ¿Cómo se escribe $y = -9x + 15$ en la forma general?
   Escoja una respuesta:
   - ☐ $9x + y = 15$
   - ☐ $-9x + y + 15 = 0$
   - ☐ $-9x + y - 15 = 0$
   - ☐ $9x + y - 15 = 0$

2. ¿Cuál es la forma general de la ecuación $3y = -8x - 11$?
3. ¿Qué es $y + 12 = -7(x - 6)$ escrito en forma general?

4. ¿Cuál es la forma general de la ecuación de la recta que pasa por $(7, -8)$ y tiene pendiente 9?

TEMA 7. LAS SECCIONES CÓNICAS

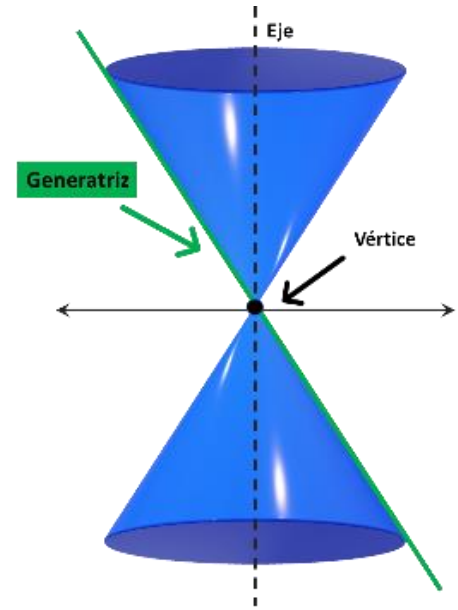
¡Hagamos un poco de Historia!

En el siglo XVI el filósofo y matemático **René Descartes** (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada **Geometría Analítica**. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas.[8]

Las secciones cónicas son curvas que pueden obtenerse como la intersección de un cono circular recto con un plano que no contenga el vértice del cono.

Una superficie cónica de revolución o cono de doble hoja se obtiene al girar una recta alrededor de una recta fija llamada eje.

[8] Cónicas-Recursos TIC
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_profesor/Documentacion_4D/mates/ganalitica/conicas.htm#:~:text=En%20el%20siglo%20XVI%20el,las%20variables%20x%20e%20y.



El punto de corte de ambas rectas es el vértice de la superficie cónica. Las diferentes cónicas se obtienen al intersecar una superficie cónica con un plano. Las curvas obtenidas pueden ser: una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

Parábola	Circunferencia	Elipse	Hipérbola
			
El plano es paralelo a la generatriz de la superficie cónica	El plano corta de forma perpendicular a la superficie cónica.	El plano corta transversalmente a la superficie cónica.	El plano es paralelo al eje de la superficie cónica.

Si desea aprender más sobre las secciones cónicas, le recomendamos mirar con detenimiento el video que aparece en el enlace debajo de la siguiente figura.

Para profundizar, en la forma estándar de la recta, le recomendamos observar el siguiente video[4]*. Acceda aquí en el icono o copie la dirección* https://www.youtube.com/watch?v=GHgHx1X4XDI

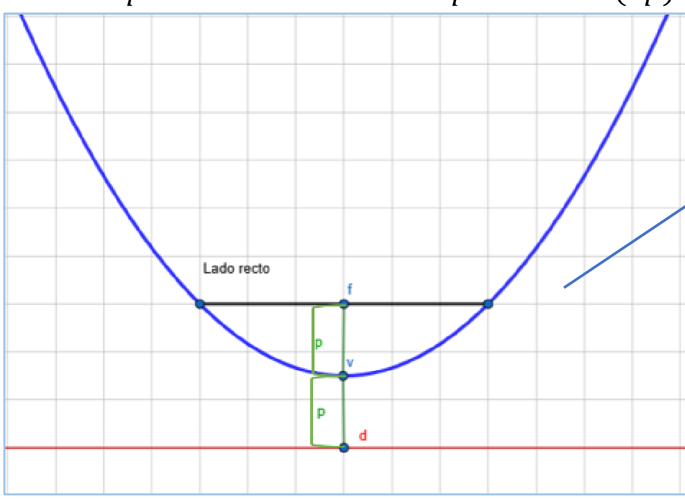
Iniciaremos con el estudio de las secciones cónicas, en particular con la parábola como recomienda e Currículo priorizado del MEDUCA para el área de Profesional y Técnica.

• La Parábola

Las parábolas se conocen comúnmente como las gráficas de funciones cuadráticas. Pueden también verse como el conjunto de todos los puntos cuya distancia desde un punto determinado (el **foco**) es igual a su distancia desde una línea determinada (la **directriz**)[9].

Elementos de una parábola:

- $Foco\ (f): Es\ el\ punto\ fijo.$
- $Vértice\ (v): Es\ el\ punto\ medio\ entre\ el\ foco\ y\ la\ directriz.$
- $Directriz\ (d): Es\ la\ recta\ fija.$
- $Parámetro\ (p): Es\ la\ distancia\ entre\ el\ foco\ y\ el\ vértice\ de\ una\ parábola.$
- $Lado\ recto\ (Lr): cuerda\ que\ pasa\ por\ el\ foco\ y\ es\ paralela\ a\ la\ directriz.$ $Es\ equivalente\ a\ 4\ veces\ el\ parámetro\ (4p).$



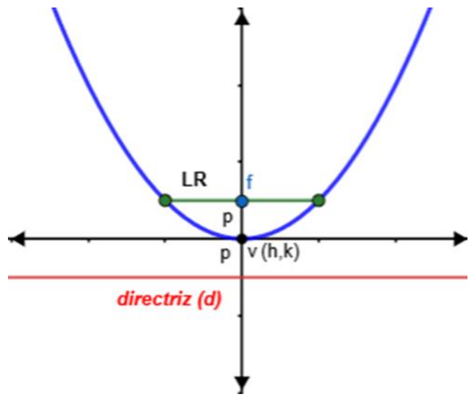
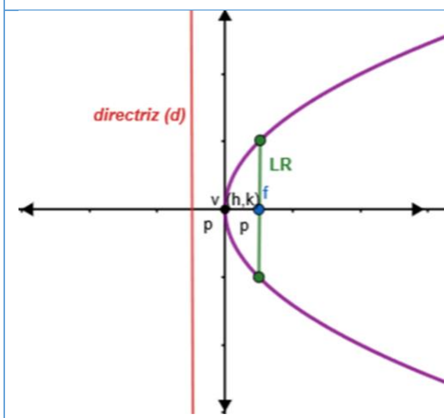
$Foco\ (f)$
$Vértice\ (v)$
$Directriz\ (d)$
$Parámetro\ (p)$
$Lado\ recto\ (Lr)$

• Ecuación de la parábola

Veremos cómo se grafica una parábola cuando se conoce el foco y la directriz. Es importante comprender la siguiente tabla para la resolución de ejercicios.

---

[9] Khan Academy. https://es.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:conics/x9e81a4f98389efdf:parab-focus-directrix/a/parabola-focus-directrix-review

	**Si abre hacia abajo:** $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2}=-4\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$ **Si abre hacia arriba:** $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2}=4\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$
	**Si abre hacia la derecha:** $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}=4\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$ **Si abre hacia la izquierda:** $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}=-4\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$

Ejemplo 1. ¿Cuál es la ecuación de la parábola con foco en (6, -4) y directriz en $y=-7$?

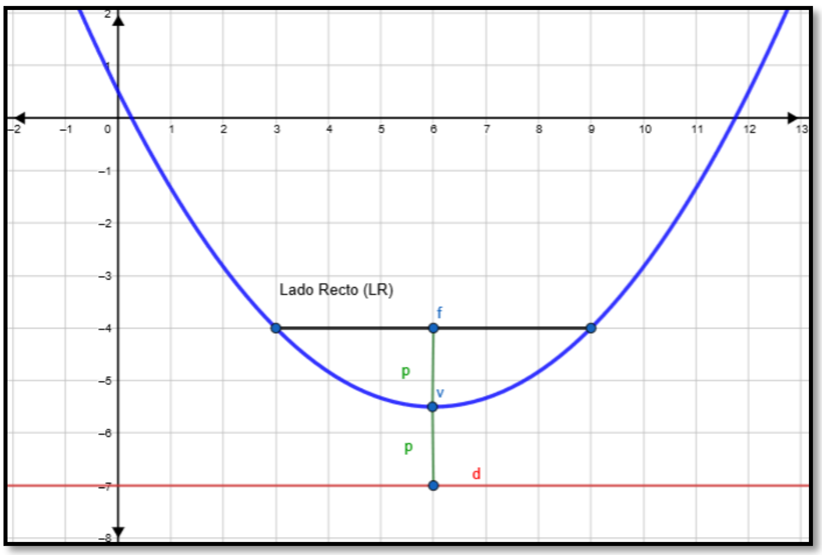
Para encontrar la ecuación de la parábola usaremos la siguiente parrilla o tabla, donde ubicaremos primeramente los valores que nos da el enunciado del problema para luego de acuerdo con las definiciones ir buscando el resto. Le recomendamos antes de iniciar tener a mano su plano coordenado para que represente primeramente los valores que le facilita el enunciado y luego los que va obteniendo en el transcurso de la solución.

De acuerdo con los datos que nos proporciona la directriz ($y=-7$), nuestra parábola puede abrir hacia arriba o hacia abajo, ya que al extenderse la parábola no toca la directriz. Cuando graficamos y=-7 se comprende mejor hacia dónde abre la parábola y se complementa cuando ubicamos el foco. Recuerde que el vértice se encuentra entre la directriz y el foco.

Elementos	Procedimiento	Observaciones
$\boldsymbol{Foco}\ (\boldsymbol{f})$	(6, -4)	Me lo facilita el enunciado.
$\boldsymbol{V\acute{e}rtice}\ (\boldsymbol{v})$	Calculamos la distancia entre el foco y un punto en la directriz usando la fórmula de la	Es el punto medio entre el foco y la directriz. Se puede calcular

	distancia entre dos puntos, que corresponde al teorema de Pitágoras. El punto (6, -7) lo obtenemos de la gráfica. **($\overset{x_1}{6}$, $\overset{y_1}{-4}$) y ($\overset{x_2}{6}$, $\overset{y_2}{-7}$)** $d=\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$ $d=\sqrt{(-7--4)^2+(6-6)^2}$ $d=\sqrt{(-7+4)^2+(0)^2}$ $d=\sqrt{(-3)^2+(0)^2}$ $d=\sqrt{9}$ $d=3$ Luego $\mathbf{3 \div 2 = 1,5}$ Por tanto el vértice tiene coordenadas $(\mathbf{6}\ ;\ \mathbf{5,5})$	con la fórmula de la distancia entre dos puntos o identificar gráficamente. Cuando representamos el punto **f** en el plano y la directriz (**d**) nos damos cuenta de que entre ambos hay una distancia de 3 unidades. Como el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz podemos calcularlo dividiendo **3÷2=1,5** Puede usar la estrategia que le resulte más conveniente.
$\boldsymbol{Directriz\ (d)}$	$y = -7$	Me lo facilita el enunciado. Su representación en el plano coordenado nos facilita entender hacia dónde puede abrir nuestra parábola. En este caso abre hacia arriba.
$\boldsymbol{Parámetro\ (p)}$	$p = 1,5$	Es la distancia entre el foco y el vértice de la parábola. El cálculo anterior nos permite encontrar esa distancia, la cual es de 1,5 (una unidad con cinco décimas). También se puede obtener a través de la distancia entre dos puntos.
$\boldsymbol{Lado\ Recto\ (LR)}$	$LR = 4(p) = 4(1,5) = 6$ unidades El lado recto indica la abertura de la parábola	Cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz. Es equivalente a 4 veces el parámetro (4p).
Ecuación	Coordenadas del vértice: **($\overset{h}{6}$; $\overset{K}{5,5}$)** **p=1,5** Se sustituyen los valores en la ecuación. $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2 = \mathbf{4}\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{x}-6)^2 = \mathbf{4}\,(1,5)\,(\boldsymbol{y}-5,5)$ $(\boldsymbol{x}-6)^2 = 6\,(\boldsymbol{y}-5,5)$ $(\boldsymbol{x}-6)^2 = 6\boldsymbol{y}-33$ $(\boldsymbol{x}-6)^2 + 33 = 6\boldsymbol{y}$ $6\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}-6)^2 + 33$	Puede realizar las operaciones con la ayuda de una calculadora.

	$y = \dfrac{(x-6)^2 + 33}{6}$ $y = \dfrac{(x-6)^2}{6} + \dfrac{33}{6}$ $y = \dfrac{(x-6)^2}{6} + \dfrac{11}{2}$	



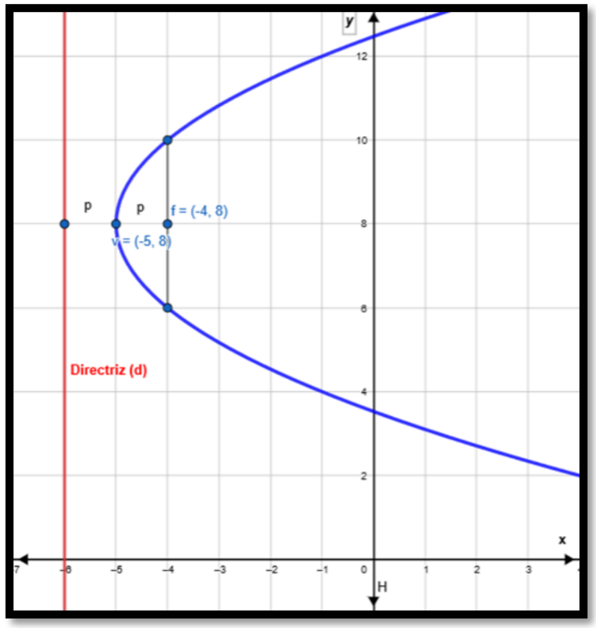
Ejemplo 2. ¿Cuál es la ecuación de la parábola con foco en (-4, 8) y directriz en $x = -6$?

Para encontrar la ecuación de la parábola usaremos la parrilla o tabla parecida al ejemplo 1.

De acuerdo con los datos de la directriz $x = -6$ nuestra parábola puede abrir hacia la derecha o hacia la izquierda, para su mejor comprensión se recomienda graficar la recta.

Elementos	Procedimiento	Observaciones
$\boldsymbol{Foco}\ (\boldsymbol{f})$	(-4, 8)	Me lo facilita el enunciado
$\boldsymbol{Vértice}\ (\boldsymbol{v})$	Calculamos la distancia entre el foco y un punto en la directriz usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, que corresponde al teorema de Pitágoras. El punto (-6,8) lo obtenemos de la gráfica. **$(\overset{x_1}{-4}, \overset{y_1}{8})$ y $(\overset{x_2}{-6}, \overset{y_2}{8})$** $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$ $d = \sqrt{(8-8)^2 + (-6 - -4)^2}$	Es el punto medio entre el foco y la directriz. Se puede calcular con la fórmula de la distancia entre dos puntos o a través de la gráfica. Cuando representamos el punto **f** en el plano y la directriz (**d**) nos damos cuenta de que entre ambos hay una distancia de 2 unidades. Como el vértice es el

	$d=\sqrt{(8-8)^2+(-6+4)^2}$ $d=\sqrt{(-2)^2}$ $d=\sqrt{4}$ $d=2$ Luego **2÷2=1** Por tanto el vértice tiene coordenadas (**-5**; **8**)	punto medio entre el foco y la directriz podemos calcularlo dividiendo **2÷2=1** Puede usar la estrategia que le resulte más conveniente.
$\boldsymbol{Directriz\ (d)}$	$x = -6$	Me lo facilita el enunciado. Lo que indica que la parábola puede abrir hacia la derecha o hacia la izquierda. En este caso abre hacia la derecha.
$\boldsymbol{Parámetro\ (p)}$	$p = 1$	Es la distancia entre el foco y el vértice de una parábola. El cálculo anterior nos permite encontrar esa distancia, la cual es de 1 (una unidad).
$\boldsymbol{Lado\ Recto\ (LR)}$	$LR = 4(p) = 4(1) = 4$ unidades El lado recto indica la abertura de la parábola	Cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz. Es equivalente a 4 veces el parámetro (4p).
Ecuación	Coordenadas del vértice: $(\overset{h}{\mathbf{-5}}\,;\,\overset{K}{8})$ **p=1** Se sustituyen los valores en la ecuación. $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$ $(\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}\,(1)\,(\boldsymbol{x}--5)$ $(\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}} = 4\,(\boldsymbol{x}+5)$ $(\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}} = 4\,x+20$ $(\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}}-20 = 4\boldsymbol{x}$ $4x = (\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}}-20$ $\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}}-20}{4}$ $\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}}}{4}-\frac{20}{4}$ $\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{y}-8)^{\mathbf{2}}}{4}-5$	Puede realizar las operaciones con la ayuda de una calculadora.



ACTIVIDAD N°7.

Si necesita ver más ejemplos desarrollados sobre cómo encontrar la ecuación de la parábola le recomendamos ver el video que se encuentra en el siguiente enlace: https://www.youtube.com/watch?v=5Vgy7tdMC2k

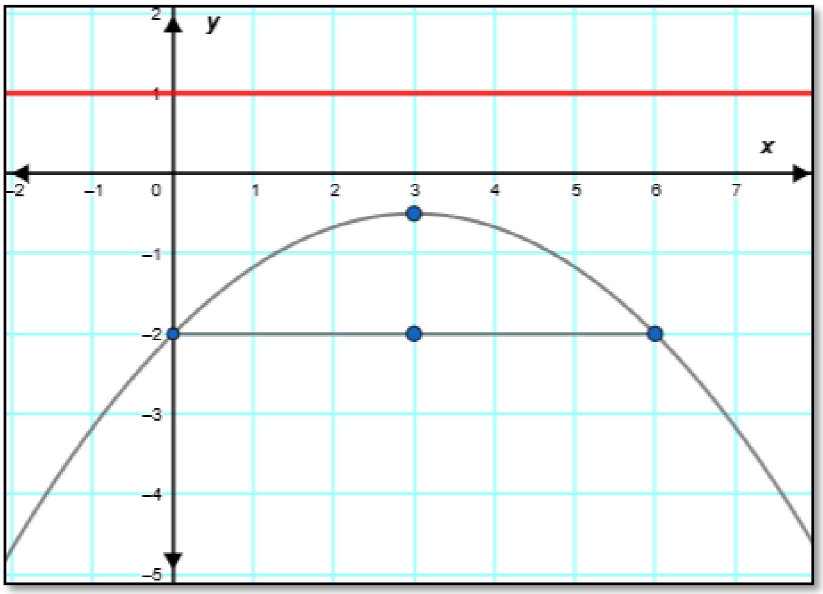
1. Determine la ecuación de las parábolas con los siguientes elementos:
    a. Foco en (-2, 5) y directriz en $y = 3$
    b. Foco en $(0, -\frac{5}{2})$ y directriz en $y = -\frac{5}{2}$
    c. Foco en (-5, 0) y directriz en $x = 5$
    d. Foco en (0, -2) y directriz en $x = 5$

Puede usar como guía la siguiente tabla:

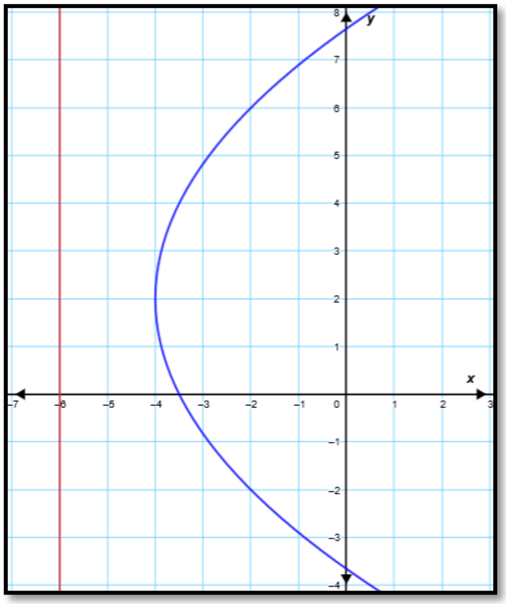
Elementos	Procedimiento
Foco (f)	
Vértice (v)	
Directriz (d)	
Parámetro (p)	
Lado Recto (LR)	

Ecuación	

2. ¿Cuáles son los elementos (foco, vértice y parámetro), la longitud del lado recto, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola?



3. Dada la siguiente parábola encuentre:
    a. Coordenada del foco: ___________
    b. Coordenada del vértice: _________
    c. Longitud del parámetro: ________
    d. Longitud del lado recto: ________
    e. Ecuación de la parábola: ________


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3

KHAN ACADEMY

Khan Academy

- Aprendemos, reforzamos y atendemos a la diversidad

Le recomendamos practicar durante la semana, una hora en la plataforma más popular del mundo para aprender matemáticas. Visite esta y otras actividades, busque pistas, vea videos y refuerce los contenidos. Es totalmente gratuita. Podrá registrarse con su correo electrónico en https://es.khanacademy.org/.

Empecemos con la HORA DE KHAN ACADEMY

TEMA1:

1. **Identidades trigonométricas**

https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trig-equations-and-identities/using-trig-identities/v/examples-using-pythagorean-identities-to-simplify-trigonometric-expressions?modal=1

2. **Identidad Pitagórica**

https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles/intro-to-the-pythagorean-identity/v/pythagorean-trig-identity-from-soh-cah-toa?modal=1

3. **Introducción a la forma pendiente-ordenada al origen**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:intro-to-slope-intercept-form/e/slope-from-an-equation-in-slope-intercept-form

4. **Grafica a partir de la pendiente ordenada al origen**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:graphing-slope-intercept-equations/e/graph-from-slope-intercept-equation

5. **La forma punto-pendiente**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:point-slope-form/e/converting_between_point_slope_and_slope_intercept

6. **Convierte ecuaciones lineales a la forma estándar**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:standard-form/e/converting_between_slope_intercept_and_standard_form

CURSOS GRATUITOS DE GEOGEBRA

Descarga curso inicial y avanzado en:

https://www.oei.es/Educacion/recursoseducativosoei/formaciondocente

AUTOEVALUACIÓN A-1

Estimados Alumnos(as): con el propósito de favorecer el desarrollo de la guía de aprendizaje, le presentamos la autoevaluación de la misma.

La autoevaluación induce a que "los alumnos desarrollen el hábito de la reflexión, y la identificación de los propios errores, cuestión fundamental cuando se trata de formar personas con capacidad para aprender de forma autónoma". (Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. 2005, p.27)

La siguiente tabla debe ser completada al culminar todos los temas, evalúese y propóngase nuevas metas en el aprendizaje. Las preguntas van conectadas a una escala que usted considerará según el trabajo realizado hasta el momento. Esta evaluación es cualitativa.

- Al completar la unidad 1, autoevalúese según la siguiente escala de logros:

Lo he logrado	Lo estoy logrando	Estoy intentando lograrlo	No lo he Logrado
5	4	3	2

AL CONCLUIR LA UNIDAD 1 DEL GUÍA DE APRENDIZAJE CONSIDERO QUE:	COLOQUE UN NÚMERO SEGÚN LA ESCALA
En la asimilación de todos los conceptos	
En la actitud positiva ante los retos al desarrollar los ejercicios	
En incrementar mi curiosidad por investigar y descubrir cosas nuevas	
En mejorar mi capacidad para resolver problemas	
En hacer buen uso de las TIC's para profundizar e investigar con las diferentes plataformas educativas	
En seguir las indicaciones y sugerencias del guía de aprendizaje	
En hacer buen uso del tiempo para resolver las tareas	
En conectar los temas con la vida diaria	
TOTAL DE PUNTOS →	

RESPUESTA DE ACTIVIDAD N°2.

A- Repasemos lo aprendido.
I- Doble alternativa.

V
V
V
F
F

II- Desarrollo.
1) Escriba dos funciones recíprocas. (puede escribir cualquiera de las tres)

Sen A. Csc A = 1, Tan B. Cot B = 1

2) Escriba una función cociente.

Demostración página 11

$$\frac{Cos\ A}{sen\ A} = \cot A$$

Demostración: $\frac{Cos\ A}{sen\ A} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{r} \cdot \frac{r}{y} = \frac{x}{y} = \frac{lado\ adyacente}{lado\ opuesto} = \cot A$

3) Escriba dos funciones pitagóricas.

- 1 + $\tan^2$ B = $\sec^2$ B

Demostración: Partiendo del teorema de Pitágoras
$X^2 + y^2 = r^2$, dividiendo por x^2 cada uno de los términos tenemos

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$ (simplificando y aplicando leye de los exponentes)
1 + $\tan^2$ B = $\sec^2$ B (reemplazando por definición de las funciones trigonométricas)

- Cot^2 B + 1 = $\csc^2$ B

Demostración: Partiendo del teorema de Pitágoras
$X^2 + y^2 = r^2$, dividiendo por y^2 cada uno de los términos tenemos

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$ (simplificando y aplicando leyes de los exponentes)

$\cot^2$ B + 1 = $\csc^2$ B (reemplazando por definición de las funciones trigonométricas)

B- Esta sección son demostraciones en las que debes partir de un miembro para llegar al otro, empezando por lo general por el miembro más complejo.

RESPUESTA DE ACTIVIDAD N°3.

I- Observe la siguiente formula

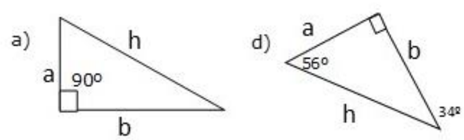
1. $Cos(\propto +\beta) = cos \propto . cos\beta - sen \propto . sen\beta$
2. $Cos(\propto -\beta) = cos \propto . cos\beta + sen \propto . sen\beta$

II- Respuesta: c.

III- $Tan(\propto -\beta) = \frac{\tan\propto - \tan\beta}{1+tan\propto . tan\beta}$

RESPUESTA DE AUTOEVALUACIÓN. PÁGINA 27

I- a y d



II- a) Lado faltante = 5 b) lado faltante = 3
ϴ = 37° β = 54°

III- sen B = $\frac{b}{a}$ cos B = $\frac{c}{a}$ tan B = $\frac{b}{c}$ cot B = $\frac{c}{b}$ sec B = $\frac{a}{c}$ csc B = $\frac{a}{b}$

IV- Ángulos compuestos

1. $\cos 97° = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}$
2. $\tan 75° = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$
3. $sen 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. $\tan 28° = \frac{12-3\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$
5. $sen\ 83° = \frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

BIBLIOGRAFÍA

Editorial Santillana (2015). Matemática 11. Serie Ser Competentes.

González Gaitán, A. E. (2008). *Matemática 11.* Panamá: Susaeta Ediciones Panamá, S.A.

Rees, P. & Sparks, F. (1995). *Trigonometría.* México: Revertè Ediciones S.A. de C.V.

Números Complejos . (s.f.). Obtenido de http://www.mate.unlp.edu.ar/practicas/78_17_20112019172028.pdf

Oteyza, E., et al. (2005). Geometría Analítica. México: Pearson Educación.

Rivera, F. (2001). Una introducción a los números complejos. Mérida.

Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. (2005, septiembre). Autoevaluación y co-evaluación: estrategias para facilitar la evaluación continuada. In *Actas del Simposio Nacional de Docencia en Informática (SINDI), Granada* (pp. 25-32).

Zill, D. y Dewar, J. (2012). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (3ª ed.). MCGraw-Hill.

INFOGRAFÍA

- https://lh3.googleusercontent.com/SMvmofuYcp6m3ckjnU0q7fIDh7DXhg3Sjjn8BuW4ls6qSAbWsE5v4fzTBLEOeWidUl0=w412-h220-rw
- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcRazYk1mMjMUbWpO4XC6RL6J1ZYvFils3JQYhNGRk4HyftjqzPJ&usqp=CAU
- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcQRsgyqHIuH6Yd2XwSoypbaD85C_QD8g0O7x6SX0vEXH4TS2D3V&usqp=CAU
- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcRWbISr_lQvNT7i0pd0gRWMUmukwc_R1nJzRvUAWICa6TCwxhvD&usqp=CAU
- https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html
- https://youtu.be/jpIOnLHIxrg
- https://youtu.be/tsv4KJ-9ais
- https://youtu.be/utUMbgmOm30
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_profesor/Documentacion_4D/mates/ganalitica/conicas.htm#:~:text=En%20el%20siglo%20XVI%20el,las%20variables%20x%20e%20y.
- https://www.youtube.com/watch?v=GHgHx1X4XDI
- https://www.youtube.com/watch?v=5Vgy7tdMC2k

ANEXO 1[10]

Los recursos complementarios que anexamos son de:
http://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/razones-trigonometricas-3.html

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

SOH-CAH-TOA: Una manera sencilla de recordar

SOH-CAH-TOA es un acrónimo que se usa para poder memorizar las definiciones de las razones trigonométricas más importantes: seno, coseno y tangente. La siguiente tabla explica su significado.

Acronimo	Descripcion verbal	Definicion matematicas
SOH	Seno es Opuesto sobre Hipotenusa	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
CAH	Coseno es Adyacente sobre Hipotenusa	$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
TOA	Tangente es Opuesto sobre Adyacente	$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$

Para las otras razones trigonométricas, en vez de crear otro acrónimo, es más sencillo aprenderse el hecho de que la cosecante, secante y cotangente, son opuestos multiplicativos del seno, coseno y tangente, respectivamente. En la siguiente tabla se detalla.

Razón Trigonométrica	Opuesto Multiplicativo
Seno $\operatorname{sen}\ \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	Cosecante $\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$
Coseno $\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	Secante $\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$
Tangente $\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$	Cotangente $\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$

[10] La información de los anexos fue obtenida de: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html

IDENTIDADES TRIGOMÉTRICAS

Identidades trigonométricas básicas

$$sen\theta \cdot csc\theta = 1$$

$$sen\theta = \frac{1}{csc\theta}$$

$$csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$

$$cos\theta \cdot sec\theta = 1$$

$$cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$$

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$$

$$tan\theta \cdot cot\theta = 1$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$$

$$cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$$

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Identidades trigonométricas pitagóricas

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sen^2\theta = 1 - cos^2\theta \quad\longrightarrow\quad sen\theta = \pm\sqrt{1 - cos^2\theta}$$

$$cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \quad\longrightarrow\quad cos\theta = \pm\sqrt{1 - sen^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta \quad\longrightarrow\quad tan^2\theta = sec^2\theta - 1$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \quad\longrightarrow\quad cot^2\theta = csc^2\theta - 1$$

Identidades trigonométricas pares e impares

Funciones Pares: $cos(-\theta) = cos\theta$ $sec(-\theta) = sec\theta$

Funciones Impares: $sen(-\theta) = -sen\theta$ $csc(-\theta) = -csc\theta$ $tan(-\theta) = -tan\theta$ $cot(-\theta) = -cot\theta$

Identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos

$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta \pm sen\beta \cdot cos\alpha$

$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sen\alpha \cdot sen\beta$

$$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\alpha \pm tan\beta}{1 \mp tan\alpha \cdot tan\beta}$$

Identidades trigonométricas del producto-suma

$$sen\alpha \cdot sen\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]$$

$$cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)]$$

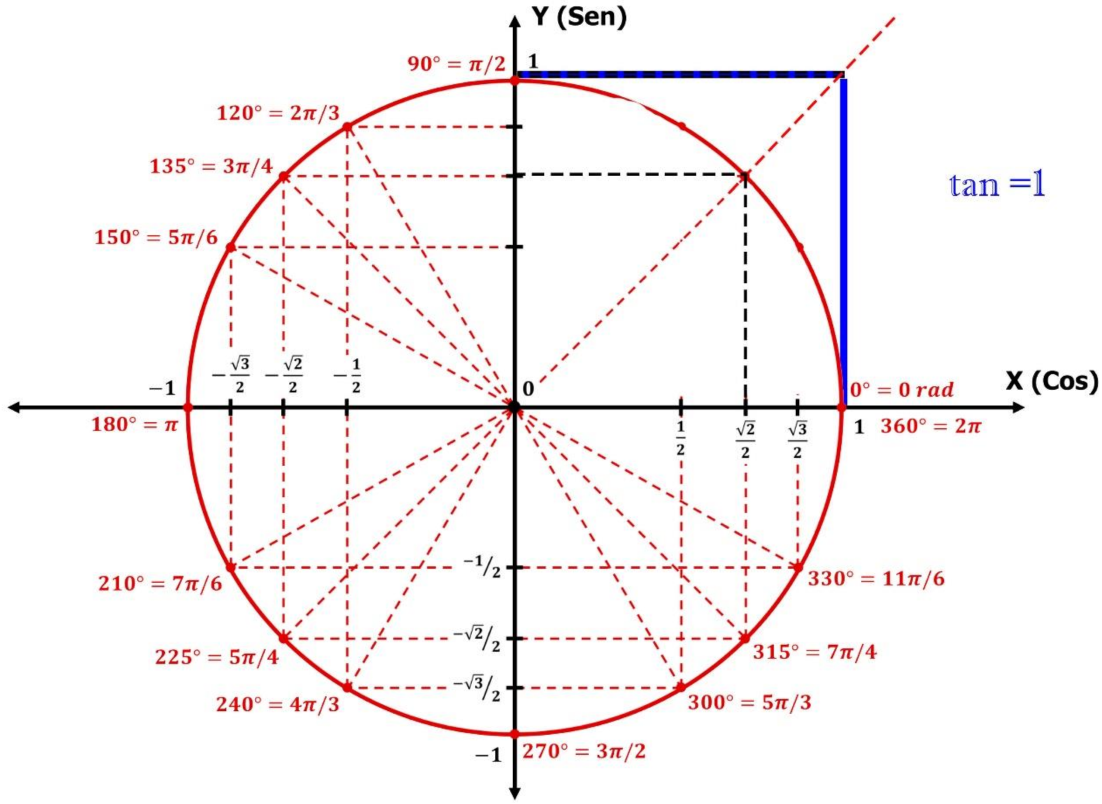
$$sen\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta)]$$

$$sen\alpha + sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2 \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$



Fórmulas para ángulos dobles

$$sen(2\theta) = 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$$

$$cos(2\theta) = \begin{cases} cos^2\theta - sen^2\theta \\ 1 - 2sen^2\theta \\ 2cos^2\theta - 1 \end{cases}$$

$$tan(2\theta) = \frac{2 \cdot tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

Fórmulas para ángulos medios

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{2}}$$

$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\theta}{2}}$$

$$tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta}} = \frac{1 - cos\theta}{sen\theta} = \frac{sen\theta}{1 + cos\theta}$$

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN