REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EL MUNDO MARAVILLOSO DE LA MATEMÁTICA

11°

Talleres para Alumnos

FASE DE VALIDACIÓN
2020 -2021

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

AUTORIDADES

S. E. Maruja Gorday de Villalobos
Ministra de Educación

S. E. Zonia Gallardo de Smith
Viceministra Académica

S. E. José Pío Castillero
Viceministro Administrativo

S. E. Ricardo Sánchez
Viceministro de Infraestructura

Equipo Directivo

Dirección General

Guillermo Alegría
Director General de Educación

Victoria Tello
Subdirectora General de Educación Académica

Anayka De La Espada
Subdirectora General Técnico Administrativa

Directores Nacionales Académicos

Isis Núñez
Directora Nacional de Educación Media Académica

Carlos González
Director Nacional de Educación Media Profesional y Técnica

Agnes de Cotes
Directora Nacional de Jóvenes y Adultos

Carmen Reyes
Directora Nacional de Currículo y Tecnología Educativa

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Dirección Nacional de Educación Media Académica
Dirección Nacional de Educación Media Profesional y Técnica
Dirección Nacional de Jóvenes y Adultos

Estudiante: ______________________________

Centro Educativo: __________________________

MATEMÁTICA UNDÉCIMO GRADO - COMERCIO

Prof. Isis Núñez – Directora Nacional de Educación Media Académica

Créditos

Equipo Coordinador

Eduvigis Mercedes Rodríguez I.
Coordinadora General

Lenin Hernández
Apoyo Técnico Curricular 10°

Emiliano González
Apoyo Técnico Curricular 11°

Lysseth A. Pittí
Apoyo Técnico Curricular 12°

Aracelly Agudo
Diseño de Portadas

Docentes Especialistas de Matemática

Décimo Grado

- **Cristina González Guerra**

Región de Panamá Centro
Instituto Comercial Panamá

- **Cynthia Candanedo**

Región de la Comarca Ngäbe Buglé
I.P. T. Sitio Prado

- **Elsa Eugenia González Serrano**

Región de Chiriquí

- Colegio Comercial Tolé
  Nilka O. Solís Samudio

Región de Chiriquí

- Colegio Francisco Morazán

Undécimo Grado

- **Johanna E. Castillo M.**

Región de Veraguas
Colegio José Bonifacio Alvarado

- **Juan Manuel Quirós**

Región de Panamá Oeste
Escuela Stella Sierra

- **Janeth Aparicio de Higuera**

Región de Coclé
I. P.T. Industrial de Aguadulce

- **Dalba Janet Morán Arias**

Región de Coclé
Instituto Carmen Conté Lombardo

- **Lorenzo Caballero Vigil**

Región de Veraguas
C.E.B.G. José Santos Puga

Colaboradores y correctores

Aritmética

- Yosari Alvarado
- Arnulfo Ariel Ríos Aparicio
- Fernando Domínguez
- Rosaura Pérez Araúz

Algebra

- Yassir E. Bruce M.
- Edilberto José Adames Pineda
- Migdalia Lineth Domínguez

Geometría

- Maricela Muñoz
- Daniel Alvarado Moreno

Trigonometría y cálculo

- Américo Rodríguez

Duodécimo Grado

- **Reyna Jaramillo**

Región de Veraguas
Instituto Urracá

- **Joel Almanza**

Región de Herrera
C. E. B. G. De Parita

- **Anastasio Serrano Abrego**

Región de Bocas del Toro
C.E.B.G. Bilingüe Guabito

- **Neuza Delgado de Pinzón**

Región de Coclé
C. E. Bilingüe Federico Zúñiga Feliú

- **Jane Cedeño**

Región de Chiriquí
Instituto David

- **José A. Echeverría**

Región de Chiriquí
Benigno Tomas Argote

- **Abdul Troncoso**

Región de Chiriquí
I.P.T Diurno de David

- **Dalys Villarreal**

Región de Coclé
I.P. T. Industrial de Aguadulce

- **Nurkia Díaz de Mendieta**

Región de Panamá Centro
I.P.T. Don Bosco

El Mundo Maravilloso de la Matemática

El contenido de esta guía de aprendizaje es con fines estrictamente educativos, ha sido ajustado al currículo priorizado del Ministerio de Educación de la República de Panamá. Este material está disponible para el uso de todos los docentes y alumnos de nuestro país como una herramienta de apoyo en el desarrollo de los contenidos del grado y ha sido desarrollada un grupo de docentes de matemática y los egresados de la Maestría en Didáctica de la Matemática, dictada por la Universidad Autónoma de Barcelona; Auspiciada por la SENACYT. *Este documento es gratuito, se prohíbe su venta y promoción de cualquier empresa sin autorización.*

Mensaje para los estudiantes

Apreciado estudiante:

Pensando en ti, para que puedas lograr tus sueños, queremos que sigas aprendiendo. Ahora que estás en casa, aprovecha y comparte con tu familia, escribe historias con tus personajes favoritos, lee todo lo que puedas, imagina un mundo mejor, cuida a los animales, siembra un árbol; en fin, aprovecha el tiempo y trata de ser muy feliz.

¡Te extrañamos! pronto nos veremos, recuerda que es importante que sigas aprendiendo. Para lograrlo, debes desarrollar cada una de las asignaciones y actividades, que han sido elaboradas, especialmente para ti. Trata de hacerlo de forma independiente, si tienes quien te ayude, ¡fabuloso! Pero recuerda, tienes una oportunidad valiosa para que, a través de los libros, puedas conocer el mundo, aprender la magia de los números, viajar con la lectura, analizar la importancia del agua, los beneficios de los árboles, el funcionamiento de nuestro cuerpo y los cuidados que debemos darle.

Eres de gran valor para tu familia y nuestro país, por eso debes cuidar tu salud y seguir las recomendaciones para la prevención de enfermedades.

Pronto volveremos a la escuela y queremos que nos digas cuanto aprendiste, el tema más interesante que desarrollaste, la lectura que más te gustó, lo divertido que fue para ti, aprender en casa. ¡Nos veremos pronto, todo va a salir bien!

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Contenido

UNIDAD 1: GEOMETRÍA ANALÍTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplica la ecuación de la recta para resolver problemas comerciales.

INDICADORES DE LOGRO

- Determina con exactitud la pendiente de una recta.
- Establece las diferentes formas de la ecuación de la recta.
- Determina con exactitud los valores de las variables que definen la ecuación.
- Representa con exactitud en el plano cartesiano la ecuación de la recta.

UNIDAD 2: ÁLGEBRA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplica los métodos de solución de sistemas de ecuaciones para determinar las raíces que las satisfacen

INDICADORES DE LOGRO

- Representa el esquema correspondiente de una situación real dada para plantear el sistema en términos de las incógnitas.

UNIDAD 3: TRIGONOMETRÍA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplica las razones trigonométricas al resolver problemas de vida cotidiana relacionada con los triángulos.

INDICADORES DE LOGRO

- Construye correctamente ángulos en posición normal y determina el valor de las razones trigonométricas.
- Resuelve triángulos rectángulos con ángulos especiales aplicando correctamente las razones trigonométricas.
- Calcula el valor de expresiones trigonométricas aplicando los ángulos especiales.

UNIDAD 4: ESTADÍSTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Determina el acercamiento o distanciamiento de los datos valores de una distribución frente a su promedio aplicando las medidas de variabilidad

INDICADORES DE LOGRO

- Interpreta y valora la utilidad de las medidas de variabilidad ante la solución de un fenómeno social.
- Prueba hipótesis planteadas sobre fenómenos sociales y comerciales utilizando las medidas de

variabilidad.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

- **Aprender a aprender:** Muestra capacidad permanente para obtener y aplicar nuevos conocimientos y adquirir destrezas.
  Desarrolla la habilidad para utilizar y relacionar situaciones reales que involucren diferentes tipos de aplicación en el área técnica de los números complejos, inecuaciones y la trigonometría.
- **Matemáticas:** Resuelve los conceptos matemáticos en la solución de situaciones de su entorno.
- **Tratamiento de la información y competencia digital:** Participa en proyectos innovadores mediante la aplicación de estrategias diversas con miras a la solución de situaciones de su entorno.
- **Autonomía e iniciativa personal:** Manifiesta actitud perseverante hasta lograr las metas que se ha propuesto.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Lápiz, borrador cuaderno, calculadora, Microsoft Office-Excel.

PRESENTACIÓN

El COVID-19 nos ha cambiado la vida, ahora debemos estar en casa y no en las escuelas como estamos acostumbrados. De esta manera evitamos un mayor contagio en las comunidades, en nuestras familias y amigos. Para que continúe estudiando en su casa, un grupo de docentes de matemática y los egresados de la Maestría en Didáctica de la Matemática, dictada por la Universidad Autónoma de Barcelona; Auspiciada por la SENACYT, hemos elaborado esta guía de aprendizaje con el fin de que nuestros estudiantes sean competentes y descubran la importancia de la matemática y sus aplicaciones en la naturaleza, en la vida diaria y en el mundo. El propósito fundamental es mejorar la calidad en los procesos de enseñanza.

Las temáticas presentadas corresponden al currículo priorizado de undécimo grado del Bachiller en Comercio. En los talleres que hemos seleccionado está considerada la problemática que existe en esta área y el papel fundamental de la visualización en el desarrollo de problemas matemáticos.

La relación con la naturaleza, el contexto y la relación con otras ciencias, permiten que el estudiante desarrolle la visualización explorando y observando lo que sucede con los objetos que existen en su medio, que se valore a sí mismo y aborde problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue e integre los conocimientos tecnológicos, humanísticos y científicos que faciliten el establecimiento de relaciones entre los diferentes campos del saber humano.

A continuación, presentamos los conceptos básicos mediante una secuencia de actividades (Introducción-I, Temas-T, Autoevaluación-A); que corresponden al año lectivo 2020, **las mismas pueden ser desarrolladas en este cuadernillo o en su portafolio de actividades.**

Bienvenidos al "*Mundo Maravilloso de la Matemática*".

#aprendoencasa, ¡Juntos lo lograremos!

Docentes del Mundo Maravilloso de la Matemática.

El Mundo Maravilloso de la Matemática

1 | GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA 1. LA RECTA

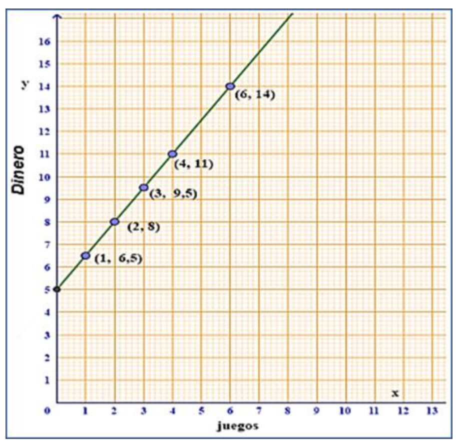
En la vida diaria es posible encontrar situaciones que se pueden plantear como ecuaciones de la recta. Por ejemplo, se puede hacer una ecuación con la cantidad de dinero que gastó cuando va al parque de diversiones, entre otros.

Cuando Kevin va al parque de diversiones necesita llevar B/. 5,00 para el transporte y B/.1,50 por cada juego al que quiera subir. La cantidad de dinero que debe llevar va a depender de los juegos, que va a utilizar. Como ves hay una cantidad fija B/. 5,00 y una que varía dependiendo del número de juegos, B/. 1,50 por cada uno. Si solo va a subir a un juego debe llevar B/. 6,50, dos debe llevar B/.8, como se ve en la tabla.

Una ecuación que describe la situación es: $y = 1{,}5\,x + 5$

Una gráfica de que representa esta situación es:

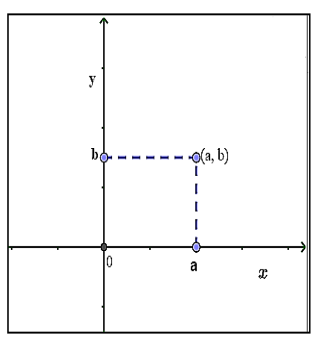
x	y
1	6,5
2	8
3	9,5
4	11
6	14



Antes de iniciar repasemos contenido importante en el estudio de la recta.

- *El plano cartesiano*

El plano cartesiano o sistema de ejes coordenados está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical llamadas ejes.

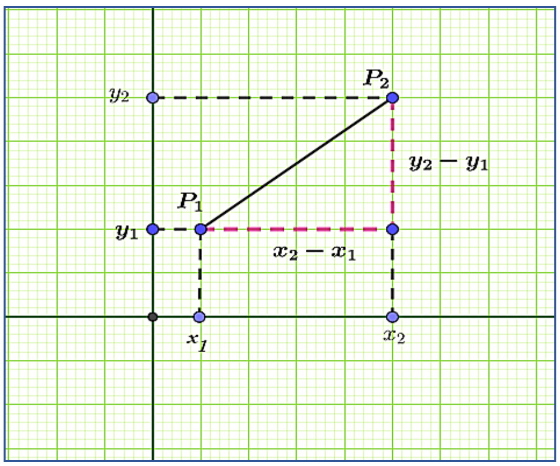


SABÍAS QUE...

El plano cartesiano lo describió por primera vez René Descartes (1596-1650), en su libro Discurso del método.

La idea de combinar el álgebra y la geometría permitió que los matemáticos visualizaran las ecuaciones que estudiaban. El filósofo John Stuart Mill llamó a su invención "el paso más grande jamás dado en el avance de las ciencias exactas". Descartes inventó el plano coordenado mientras yacía en la cama observando el recorrido errático de una mosca en el techo, y razonando que podría describir la posición exacta de la mosca si supiera su distancia a dos muros perpendiculares.

El eje horizontal **(eje x)** se denomina eje de las abscisas y el eje vertical **(eje y)** se denomina eje de las ordenadas. Sobre este sistema se pueden ubicar todos los pares ordenados de la forma (a, b), como lo muestra la imagen.
En el punto P(a, b) los elementos a, b se llaman coordenadas del punto P.



- ## Distancia entre dos puntos

Supongamos que $P_1\ (x_1,\ y_1\ )$ y $P_2\ (x_2\ , y_2\ )$ Son dos puntos del plano tal como se observa en la figura.
La distancia entre P_1 y P_2 se puede determinar mediante el teorema de Pitágoras, de la siguiente manera:

$$(\overline{P_1P_2})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Así la distancia de P_1 a P_2 es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1: la distancia entre los puntos $A(5, 8)$ y $B\ (3, -4)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-5)^2 + (-4-8)^2}$$

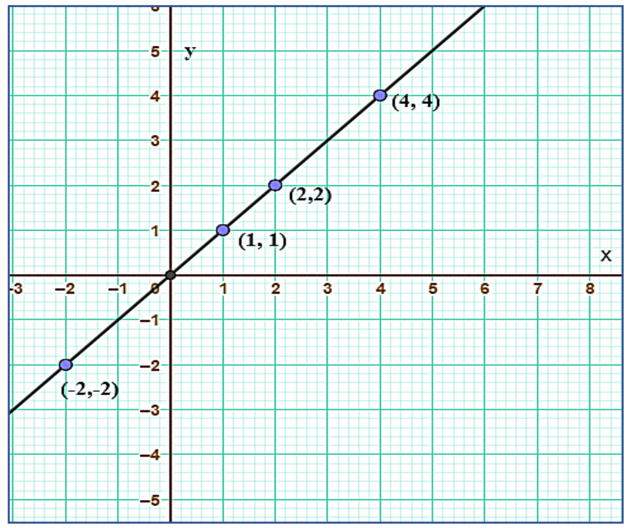
$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-12)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{4 + 144}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{148}$$

• La recta

Una recta es el conjunto de todos los puntos del plano, donde las coordenadas de cada punto satisfacen una ecuación de primer grado. Es decir, la recta se expresa por medio de una ecuación de primer grado con dos variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$.



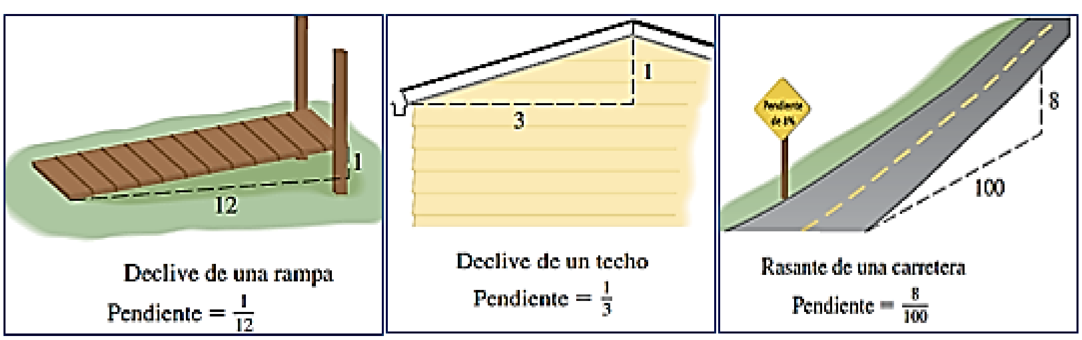
Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta.

Para la recta $y = x$ las coordenadas de todos los puntos, como $(4, 4)$; $(1, 1)$; $(-2, -2)$, satisfacen la ecuación

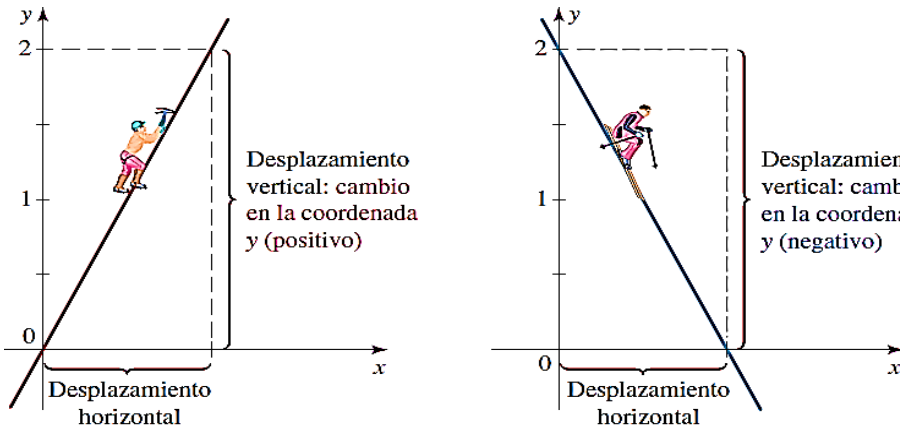
• Pendiente de una recta

Para el estudio de la pendiente de una recta, es importante tener una idea de su significado en nuestro entorno. Observa las siguientes imágenes

En la figura se muestran situaciones donde la pendiente es importante para determinar el declive de una rampa, un techo, o la inclinación (rasante) de una carretera, así como también se utiliza en el diseño de juegos infantiles o equipos industriales



La pendiente de una recta es la relación de desplazamiento horizontal a desplazamiento vertical. Si una recta está en un plano coordenado, entonces el desplazamiento horizontal es el cambio en la coordenada $\boldsymbol{x}$ y el desplazamiento vertical es el cambio correspondiente en la coordenada $\boldsymbol{y}$ entre dos puntos cualesquiera de la recta.



La pendiente de una línea recta es el grado de inclinación de la recta respecto al $eje\ x$ del plano cartesiano.

Así la pendiente m de una recta que no es vertical y que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es:

$$m = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

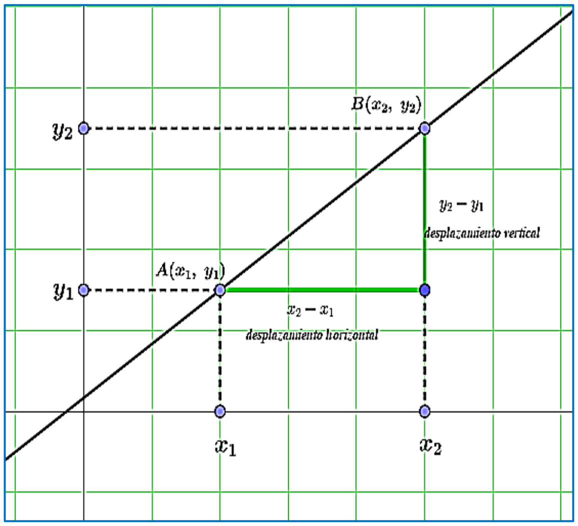
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observaciones:

La pendiente es positiva cuando la recta esta inclinada hacia la derecha.

La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.

La pendiente es negativa cuando la recta esta inclinada hacia la izquierda.



Conforme el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta está más inclinada. Una recta vertical no tiene pendiente

Ejemplo:

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos indicados.

$A\ (2{,}7) y\ B\ (-5,-7)$ 2. $D\ (6,-10),$
$y\ E\ (6{,}4)$ 3. $F\ (5{,}4)\ y\ \ G\ (-3,4)$

Solución:

$\boldsymbol{A\ (2,7)\ y\ B\ (-5,-7)}$	$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-7}{-5-2} = \frac{-14}{-7} = 2}$	$\boldsymbol{m}$ positiva la recta se inclina hacia la derecha
$\boldsymbol{D\ (6,-10), y\ E\ (6,4)}$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-(-10)}{6-6} = \frac{-4+10}{0} = \infty$	Recta vertical, m no está definida
$\boldsymbol{F\ (5,4)\ y\ \ G\ (-3,4)}$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-4}{-3-5} = \frac{0}{-8} = 0$	Recta horizontal $m = 0$

Dada la gráfica de una recta en el plano cartesiano podemos determinar su pendiente. Observemos la siguiente gráfica.

La recta representada tiene pendiente 2, pues el desplazamiento vertical desde el punto (4,3) a (3,1) es 2 y el horizontal es 1.

$$m = \frac{2}{1}$$

Del punto (2,1) a (0,-5) es 4 vertical y 2 horizontal, por tanto, la pendiente será:

$$m = \frac{4}{2} = 2$$

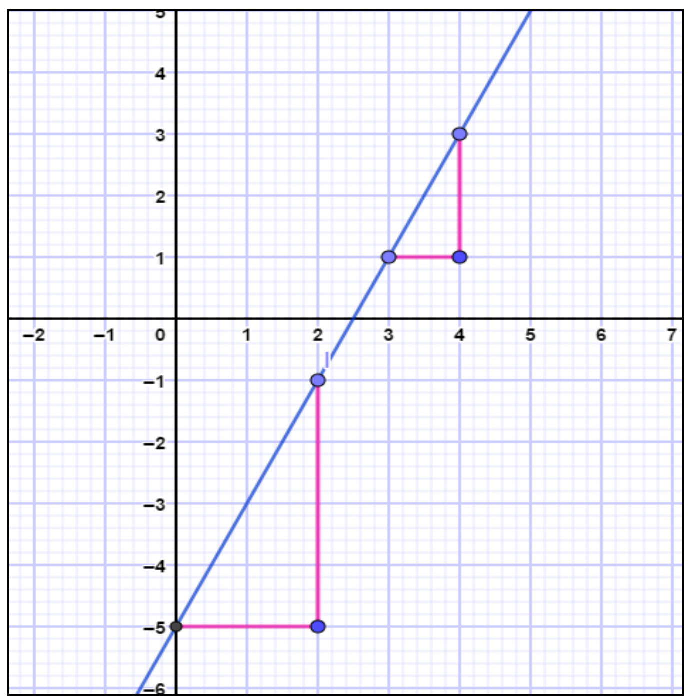
Como la intersección con el eje y es -5 entonces la ecuación de esta recta es

$$y = 2x - 5$$

Veamos la siguiente gráfica:

Observemos que esta recta tiene pendiente igual a 4. Pues el desplazamiento vertical es 4 y el horizontal es 1.

$$m = \frac{4}{1} = 4$$



ACTIVIDAD N°1

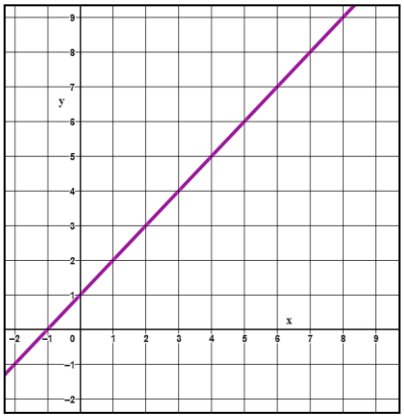
1. Dibuje el plano cartesiano y represente los siguientes puntos:

$\boldsymbol{A(2,3)}$, $\boldsymbol{B(-1,-1)}$, $\boldsymbol{C(5,-1)}$, $\boldsymbol{D(2,0)}$

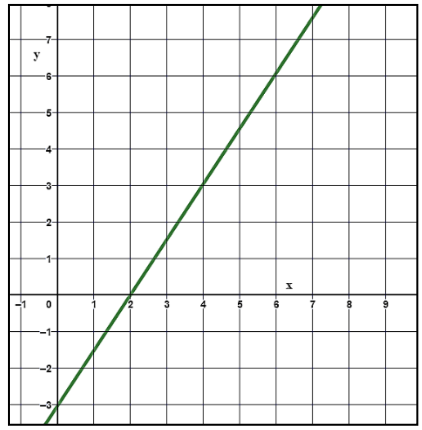
- Trace los segmentos de $\overline{\boldsymbol{AB}}$; $\overline{\boldsymbol{BC}}$; $\overline{\boldsymbol{AC}}$; $\overline{\boldsymbol{AD}}$; $\overline{\boldsymbol{BD}}$; $\overline{\boldsymbol{CD}}$
- Calcule la distancia entre los puntos **A, D, y B, C**
- Determine la pendiente de $\overline{\boldsymbol{AB}}$ $\boldsymbol{y}$ $\overline{\boldsymbol{BC}}$

2. Calcular la pendiente de la recta en cada una de las gráficas

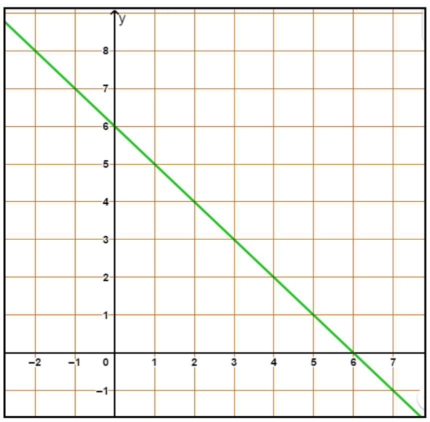
a.



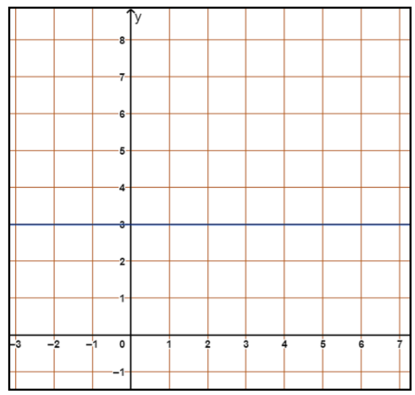
b.



c.



d.



¡GENIAL! Has aprendido el tema 1

TEMA 2. FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

- ## Ecuación pendiente – ordenada en el origen

Se llama ordenada en el origen de una recta a la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje de las y. A la ordenada en el origen se le suele representar por la letra b. La ecuación de la recta que tiene una pendiente m y cuya ordenada en el origen es b $(0, b)$ es

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Ejemplo:

a. Calcular la ecuación de la recta con pendiente 3 y ordenada en el origen igual a -2
b. Calcular la ecuación de la recta con pendiente 2 y ordenada en el origen igual a 5
c. Encontrar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3y - 2x = 1$

Solución:

a. Como $m = 3$ y $b = -2$, de acuerdo con la ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen tenemos:
$$y = 3x - 2$$
b. Como $m = 2\ y\ \ b = 5$ reemplazamos en la ecuación y tenemos
$$y = 2x + 5$$
c. Escribimos la ecuación de la forma $y = mx + b$
$$3y - 2x = 1$$
$$3\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 1$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$
La pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la ordenada $b = \frac{1}{3}$

- ## Ecuación de la forma punto – pendiente

La ecuación de la recta l con pendiente m y que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$. Se escribe en la forma:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo:

a. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -5)$ y tiene pendiente -4.
b. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $B(2,7)$ y cuya pendiente es $\frac{3}{5}$

Solución a:

Como $x = 2$, $y = -5$ y el valor de la pendiente es $m = -4$

Reemplazamos la fórmula de ecuación de la recta

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Y se tiene

$y - (-5) = -4(x - 2)$, aplicando la propiedad distributiva tenemos:

$y + 5 = -4x + 8$,

Para obtener la ecuación general igualamos a cero y reducimos los términos semejantes.

$\boxed{\boldsymbol{y + 4x - 3 = 0}}$ Que es la ecuación pedida

Solucion b:

Reemplazamos en la ecuacion $y - y_1 = m(x - x_1)$ los valores dados

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = \frac{3}{5}(x - 2)$$

$$5(y - 7) = 3(x - 2)$$

$$5y - 35 = 3x - 6$$

$$\boldsymbol{5y - 3x - 29 = 0}$$

ACTIVIDAD N°2.1

1. **Encuentre la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones:**
   a. Pendiente $\frac{2}{3}$, ordenada al origen -1
   b. Pendiente $-\frac{3}{4}$, ordenada al origen $\frac{2}{3}$
   c. Pendiente 8, ordenada al origen 0
   d. Pasa por el punto $A(3, 7)$, pendiente 3
   e. Pasa por el punto $(-2,5)$, pendiente -4
   f. Pasa por los puntos A (-4, -7), B (2, 5)
   g. Pasa por $\left(\frac{3}{4}, -3\right)$, $B\left(2, -\frac{1}{3}\right)$

• Ecuación de la recta en forma general

La forma general corresponde a la forma usual en la que se escriben las ecuaciones.

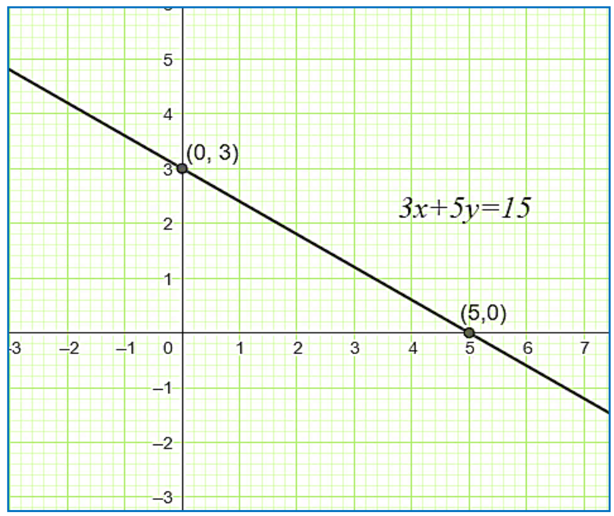
La ecuación general de la recta se puede escribir de la forma:

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

En donde A, B y C son constantes arbitrarias con A y b no nulas simultáneamente.

La gráfica de la ecuación lineal en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ es siempre una línea recta.

- Si C=0, la recta pasa por el origen
- Si B=0, la recta es vertical, y la pendiente no está definida
- Si A=0, la recta es horizontal, y tiene pendiente 0.



De la ecuación general se obtienen las fórmulas para calcular la pendiente y las intersecciones con los ejes.

Su ordenada en el origen o la intersección con el eje y es

$$b = \frac{\boldsymbol{-C}}{\boldsymbol{B}}\ (B \neq 0)$$

Su intersección con el eje x es $a = \frac{-C}{A}$

La pendiente de la recta es $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{-A}}{\boldsymbol{B}}$ **(**B≠0)

Ejemplo: Dada la ecuación $3x + 5y - 15 = 0$. Determine la pendiente y las intersecciones con los ejes de la recta.

Según la ecuación dada $A = 3, B = 5,\ C = -15$

$$m = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

La ordenada en el origen es

$$b = \frac{-C}{B} = \frac{-(-15)}{5} = \frac{15}{5} = 3 \qquad (0,3)$$

La abscisa al origen es

$$a = \frac{-C}{A} = \frac{-(-15)}{3} = \frac{15}{3} = 5 \qquad (5, 0)$$

• Representación gráfica en el plano cartesiano

La ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B, C ∈ ℝ, representa una ecuación lineal con dos incógnitas, donde las soluciones son pares ordenados de la forma (x, y). Este par ordenado (x, y) corresponde a un punto del plano cartesiano.

Ejemplo: representar la ecuación $3x - y - 2 = 0$

Se debe escoger algunos números que representan a la variable “x”, para obtener el valor de la variable "y” respectivamente así.

Despejamos y,

$-y = -3x + 2$

$y = 3x - 2$

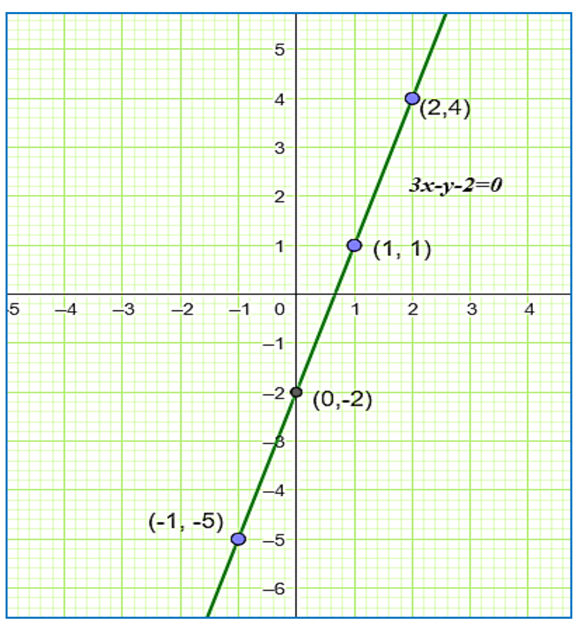
Para $x = 0 \quad y = 3(0) - 2 = -2$

$x = -1 \quad y = 3(-1) - 2 = -3 - 2 = 5$

$x = 1 \quad y = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$

$x = 2 \quad y = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$

x	**0**	**−1**	**1**	**2**
y	**−2**	**5**	**1**	**4**



ACTIVIDAD N°2.2

Determine la pendiente, las intersecciones con los ejes *y* trace la gráfica.

1. $3x + 2y = 18$
2. $6x + 7y = 42$
3. $4x - 9y = -36$
4. $7x - 2y = 4$
5. $2x + 5y = 9$
6. $5x - 3y = 6$

- **Aplicaciones**

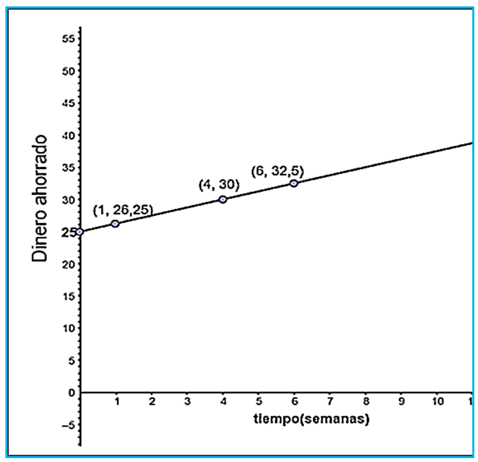
Cuando una recta se utiliza como modelo de la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la razón de cambio de una cantidad con respecto a la otra. Veamos un ejemplo

Estela abre una cuenta en el banco nacional con B/. 25,00. Cada semana ahorra B/. 1,25. Escribe la ecuación y encuentra la cantidad de dinero ahorrado en 6 semanas. Representa la gráfica de esta función.

Solución: La función correspondiente será $y = 1{,}25x + 25$ donde x es la variable independiente.

La tabla de valores:

x	y
0	25
1	26,25
2	27,5
3	28,75
4	30
5	31,25
6	32,50



Funciones lineales de costo

A las empresas les interesan los costos porque reflejan el dinero que gastan. Esos flujos de dinero suelen destinarse al pago de sueldo, materias primas, suministros, alquiler, calefacción, servicios públicos y otros gastos. El costo total lo definen en términos de dos componentes: costo total variable y costo total fijo. Ambos deben sumarse para determinar el costo total. Los costos variables dependen del nivel de producción; es decir, de la cantidad de artículos producidos. Por ejemplo, costo de materiales y de la mano de obra.

Los costos fijos no dependen del nivel de producción. Ejemplo de estos tenemos la renta, intereses sobre préstamos y salarios de administración.

$$\boldsymbol{costo\ total = costos\ variables + costos\ fijos}$$

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

La grafica de la ecuación es una recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y la ordenada al origen son los costos fijos.

Ejemplo:

Una persona que produce y vende tarjetas con material reutilizable, paga por concepto de uso de servicios B/.7,00 y producir cada tarjeta le cuesta B/. 2,00 por concepto de acrílicos y pegamento.

a. Escribe la función de costo de producir un número x de tarjetas.

b. Determine el costo de producir 3, 8, 10, 20, 30, 40 tarjetas

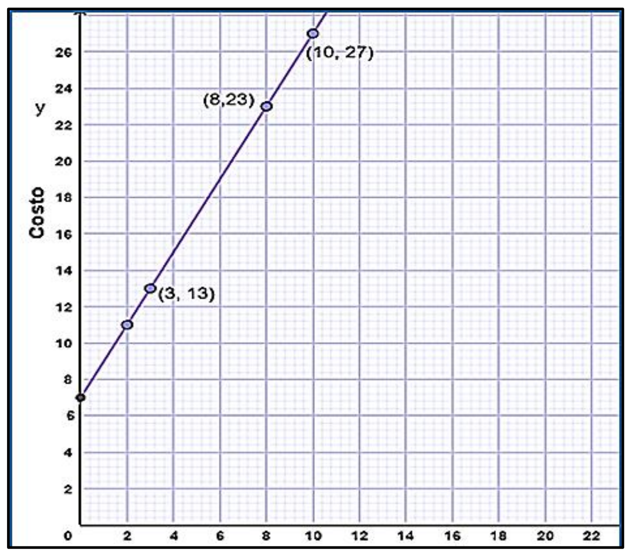
c. Represente los datos en el plano cartesiano.

Solución:

Costo fijo= 7,00   costo variable = 2

Ecuación: $y = 2x + 7{,}00$

x	y
3	13
8	23
10	27
20	47
30	67
40	87



Ejemplo:

El costo variable de procesar un kilogramo de granos de café es de B/. 0,40 y los costos fijos por día son de B/. 250.

a. Escriba la ecuación de costo lineal y dibuje su gráfica.
b. Determine el costo de procesar 2 000 kg de gramos de café en un día

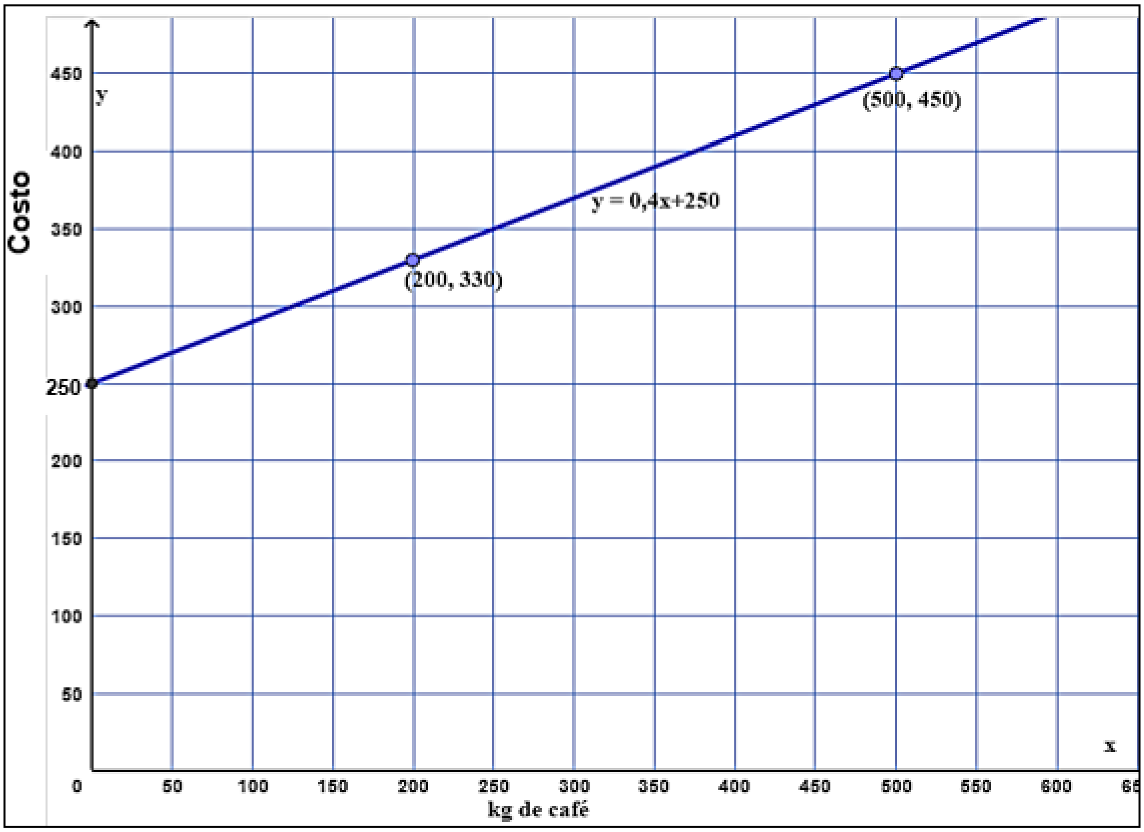
"$\boldsymbol{y}$" representa el costo de procesar x kilogramos de granos de café por día, de acuerdo con el modelo lineal, tenemos

$y = mx + b$, **m** representa el costo variable por unidad y **b** el costo fijo.

$m = 0{,}4$ $b = 250$ Por lo que $\boldsymbol{y = 0{,}4\,x + 250}$

Para representarla determinamos las coordenadas sus puntos.

x	0	200	500
y	250	330	450



Ejemplo:

Suponga que un productor sabe que el costo total de la manufactura de 1 000 unidades de su producto es de B/.8500, mientras que el costo total de la manufactura de 2 000 unidades es de B/.11 500. Suponiendo que esta relación entre el costo y el número de unidades fabricadas es lineal, encuentre la relación, grafique la ecuación e interprete la gráfica. ¿Cuál es el costo total de la producción de 2 500 unidades?

Solución: Se usa la forma dos puntos de la recta con x igual al número de unidades fabricadas, $\boldsymbol{y}$ igual al costo total de la manufactura de x unidades. La recta pasa por $(1\,000, 8\,500)$ y $(2\,000, 11\,500)$ la pendiente es:

$$m = \frac{11\,500 - 8\,500}{2\,000 - 1\,000} = \frac{3\,000}{1\,000} = 3$$

y tiene por ecuación.

$$y - 8\,500 = 3(x - 1\,000)$$
$$y = 3x + 5\,500$$

El costo de producir 2 500 unidades es $y = 3(2\,500) + 5\,500 = 13\,000$

La ordenada al origen es 5500; esto significa que, si no se manufacturan unidades, el costo fijo (renta, equipo, etc.) será de B/.5500. La pendiente es 3, lo cual significa que cuesta B/.3,00 fabricar cada unidad. Observe que en esta aplicación los valores negativos de x y y carecen de significado.

ACTIVIDAD N°2.3

Resuelva los problemas que se presentan a continuación.

1. Una empresa presta servicio de reparaciones a domicilio, la tarifa establecida por mano de obra es de B/.100,00 por el desplazamiento, y B/. 200,00 por hora o fracción de hora de trabajo.

   a. ¿Cuánto debe pagarse por un servicio que demora $2\frac{1}{2}$ horas, 5 horas?
   b. ¿Cuánto demora un servicio si la factura de cobro es de B/. 350,00?

   c. ¿Cómo puede expresarse el precio p de un servicio que dura t horas?

   d. Completa la tabla

T(horas)	0	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$
P (precio de servicio)	100			

2. Un empresario paga a sus obreros B/.4,50 por hora más una cantidad adicional de B/. 0,75 por unidad producida. Escribir una ecuación lineal para el salario por hora en términos de las unidades producidas.
3. El costo variable de procesar 1 kilogramo de azúcar morena es de B/.0,75 y los costos fijos por día son B/.500,00 a) ¿Cuál es la ecuación de costo lineal? b) determina el costo de procesar 2 000 kilogramos de azúcar morena en un día.
4. El costo de fabricar un escritorio es de B/. 125 al día. a) determine el costo total $\boldsymbol{y}$ de fabricar $\boldsymbol{x}$ escritorios al día; b) ¿Cuál es el costo de fabricar 75 escritorios al día?

5. Una compañía especializada ofrece banquetes a grupos de personas al costo de B/. 15,00 por persona, más un cargo extra de B/.100,00. Encuentre la ecuación lineal del costo $\boldsymbol{y}$ que fijaría la compañía por x personas.

6. **Costos de producción** Un pequeño fabricante de electrodomésticos observa que si produce *x* tostadores en un mes su costo de producción está representado por la ecuación donde *y* se mide en balboas. $y = 6x + 3\,000$

a) Trace una gráfica de su ecuación lineal.

b) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica?

7. El costo mensual de manejar un automóvil depende de la cantidad de millas recorridas. Lynn observa que, en mayo, el costo de manejo fue de 380 balboas por 480 millas y que en junio el costo fue de 460 balboas por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual *C* por manejar un automóvil y la distancia recorrida *d*.

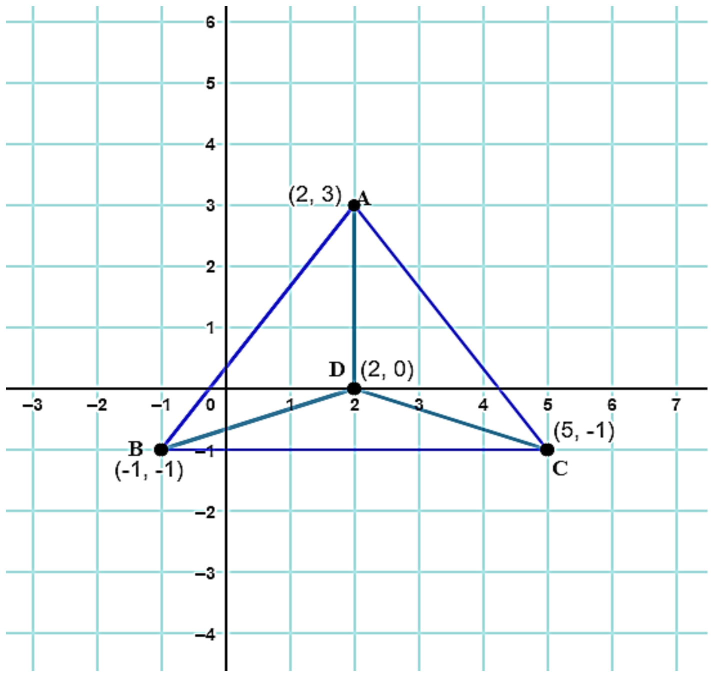
a. Calcule una ecuación lineal que relacione *C* y *d*.
b. Determine cuál es el costo por manejar 1500 millas al mes.
c. Trace la gráfica de la ecuación lineal.
d. ¿Que representa la pendiente de la recta?
e. ¿Que representa la ordenada en el origen de la gráfica?
f. ¿Por qué una relación lineal es un modelo adecuado en el caso de esta situación?

8. El gerente de una fábrica de muebles observa que cuesta 2200 balboas manufacturar 100 sillas en un día y 4800 balboas producir 300 sillas en un día. Si se supone que la relación entre costo y número de sillas fabricadas es lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. Luego grafique la ecuación.

Respuestas a las actividades

Actividad N°1

1.



2. **a.** $m = 1$; **b.** $m = 1{,}5$; **c.** $m = 0$; **d.** $m = -1$

Actividad N°2.1

a. $y = \frac{2}{3}x - 1$;

b. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}$

c. $y = 8x$

d. $y = 3x - 2$

e. $y = -4x - 3$

f. $y = 2x + 1$

g. $32x - 15y - 69 = 0$

Actividad N°2.2

1. $m = -\frac{3}{2}$; $a = 6$; $b = 9$

2. $m = -\frac{6}{7}$; $a = 7$; $b = 6$

3. $m = \frac{4}{9}$; $a = -9$; $b = 4$

4. $m = \frac{7}{2}$; $a = \frac{4}{7}$; $b = -2$

5. $m = -\frac{2}{5}$; $a = \frac{9}{2}$; $b = \frac{9}{5}$

6. $m = \frac{5}{3}$; $a = \frac{6}{5}$; $b = -2$

Actividad N°2.3

1. a. $B/.600$; **b.** 1¼ ; **c.** $p = 200$

d.

T(horas)	0	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$
P (precio de servicio)	100	250	300	400

2. $y = 0{,}75x + 4{,}50$

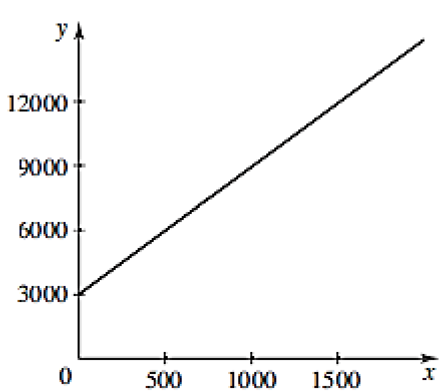
3. $y = 0{,}75x + 500$; $B/.\ 2\,000$

4. $y = 125x$; $B/.9\,375$

5. $y = 15x + 100$

6.

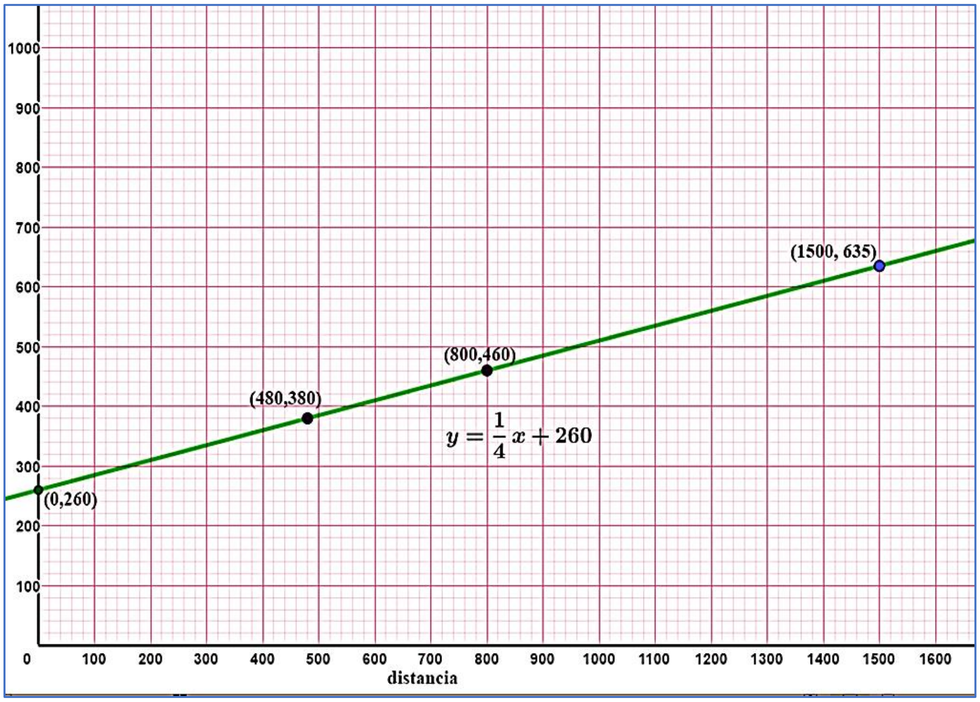
a)



b. la pendiente representa el costo de producción por tostador; el corte con el eje y es el costo fijo mensual.

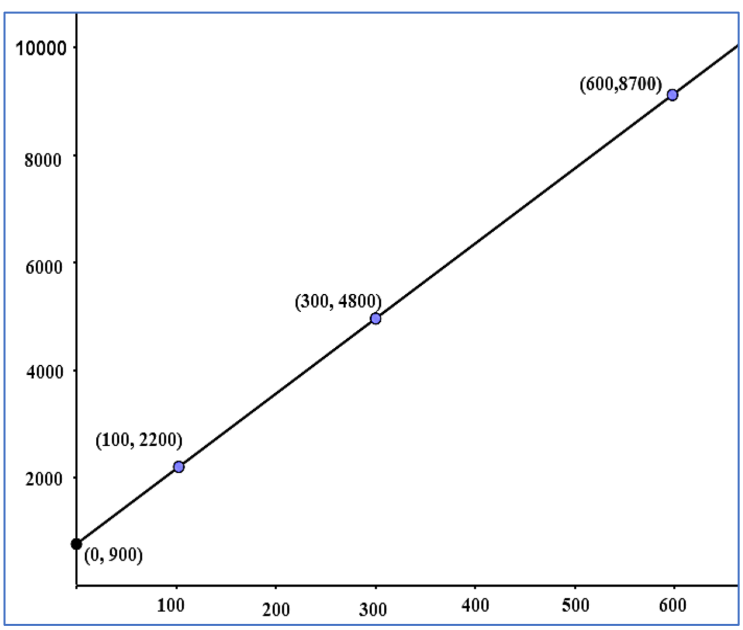
7. a. $\frac{1}{4}x + 260$; b. $B/.635$

c.



d. La pendiente es el costo por milla. **e**. costo fijo mensual.

8. $y = 13x + 900$



2 | ÁLGEBRA

TEMA 3. ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

El estudio de sistemas de ecuaciones lineales es un problema clásico de las matemáticas. Cuando se trata de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se aplican diversos métodos de resolución sencillos de tipo gráfico y algebraico; si el número de ecuaciones es superior, es preferible recurrir al empleo de matrices y determinantes.

DEFINICIÓN: Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son **simultáneas** cuando se satisfacen para valores iguales de las incógnitas.

DEFINICIÓN: La reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas se le llama **sistema de ecuaciones**.

Un sistema de ecuaciones en su forma general es:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones se dice compatible cuando tiene solución y es incompatible cuando no tiene solución.

Un sistema compatible es determinado cuando tiene una sola solución e indeterminado cuando tiene infinitas soluciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita. Esta opción se llama eliminación.

Métodos de Eliminación más Usuales

- **Método de Igualación**

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de igualación debemos seguir el siguiente procedimiento:

1. Se ordenan (alfabéticamente) y nombran las ecuaciones
2. Se selecciona una variable y se despeja ésta en ambas ecuaciones.
3. Se igualan entre sí las expresiones de la incógnita despejada en el paso anterior
4. Se resuelve la ecuación resultante (ecuación de una incógnita).
5. El valor numérico obtenido para la incógnita que estamos resolviendo, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones despejadas en el paso 2, obteniendo así el valor numérico de la otra incógnita.
6. Si se desea verificar los resultados obtenidos, se reemplazan estos valores en las ecuaciones originales para confirmar que se satisface la igualdad.

Ejemplos:

1.- $\begin{cases} x+6y=27 \\ 7x-3y=9 \end{cases}$ Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de igualación.

SOLUCIÓN:

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} x+6y=27 & (1) \\ 7x-3y=9 & (2) \end{cases}$$

Despejamos la variable x en ambas ecuaciones

$x+6y=27$ | $7x-3y=9$

$x=27-6y \quad (3)$ | $7x=9+3y$

$x=\frac{9+3y}{7} \quad (4)$

Ahora igualamos las ecuaciones 3 y 4, ya que, $x = x$

$$27 - 6y = \frac{9+3y}{7}$$

$$7(27 - 6y) = 9 + 3y$$

$$189 - 42y = 9 + 3y$$

$$-42y - 3y = 9 - 189$$

$$-45y = -180$$

$$y = \frac{-180}{-45}$$

$$y = +4 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3)

$$x = 27 - 6y \quad (3)$$

$$x = 27 - 6(4)$$

$$x = 27 - 24$$

$$x = 3$$

Verificación:

$x + 6y = 27$	$7x - 3y = 9$
$3 + 6(4) = 27$	$7(3) - 3(4) = 9$
$3 + 24 = 27$	$21 - 12 = 9$
$27 = 27$	$9 = 9$

Solución:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 15x + 11y = 32 \\ 7y - 9x = 8 \end{cases}$ Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de igualación.

SOLUCIÓN:

Enumeramos cada ecuación y ordenamos la segunda ecuación

$$\begin{cases} 15x + 11y = 32 & (1) \\ -9x + 7y = 8 & (2) \end{cases}$$

Despejamos la variable y en ambas ecuaciones.

$$15x + 11y = 32 \qquad\qquad -9x + 7y = 8$$

$$11y = 32 - 15x \qquad\qquad 7y = 8 + 9x$$

$$y = \frac{32-15x}{11} \quad (3) \qquad\qquad y = \frac{8+9x}{7} \quad (4)$$

Igualando (3) y (4) Obtenemos:

$$\frac{32-15x}{11} = \frac{8+9x}{7}$$

$$7(32 - 15x) = 11(8 + 9x)$$

$$224 - 105x = 88 + 99x$$

$$-105x - 99x = 88 - 224$$

$$-204x = -136$$

$$x = \frac{-136}{-204}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) obtenemos:

$$y = \frac{8+9x}{7}$$

$$y = \frac{8+9\left(\frac{2}{3}\right)}{7}$$

$$y = \frac{8+3(2)}{7}$$

$$y = \frac{8+6}{7}$$

$$y = \frac{14}{7}$$

$$y = 2$$

Verificación:

$$15x + 11y = 32$$
$$15\left(\frac{2}{3}\right) + 11(2) = 32$$
$$5(2) + 22 = 32$$
$$10 + 22 = 32$$
$$32 = 32$$

$$-9x + 7y = 8$$
$$-9\left(\frac{2}{3}\right) + 7(2) = 8$$
$$-3(2) + 14 = 8$$
$$-6 + 14 = 8$$
$$8 = 8$$

Solución: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases}$

3. Un autobús dedicado a los viajes de turismo interno en la ciudad de Panamá cuenta con dos pisos. En el primer piso cuenta con 25 asientos y en el segundo piso con 30. Si se logra ubicar todos los asientos en ambos pisos el ingreso total será de B/. 1525.00. En el último viaje realizado solo se logró ubicar 15 asientos en el primer piso y 18 en el segundo con un ingreso de B/. 915.00. ¿Cuál es el precio de un asiento de cada piso?

SOLUCIÓN:

Se plantea el sistema de ecuaciones: Sea A el precio de los asientos del primer piso y B el precio de los asientos del segundo piso. Entonces:

$$\begin{cases} 25A + 30B = 1525 \\ 15A + 21B = 1005 \end{cases}$$

Apliquemos ahora el método de igualación para resolver el sistema de ecuaciones planteado.

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} 25A + 30B = 1525 & (1) \\ 15A + 21B = 1005 & (2) \end{cases}$$

Despejamos la variable A en ambas ecuaciones.

$$25A + 30B = 1525 \qquad\qquad 15A + 21B = 1005$$

$$25A = 1525 - 30B \qquad\qquad 15A = 1005 - 21B$$

$$A = \frac{1525-30B}{25} \quad (3) \qquad\qquad A = \frac{1005-21B}{15} \quad (4)$$

Igualando (3) y (4) Obtenemos:

$$\frac{1525-30B}{25} = \frac{1005-21B}{15}$$

$$15(1525 - 30B) = 25(1005 - 21B)$$

$$22875 - 450B = 25125 - 525B$$

$$-450B + 525B = 25125 - 22875$$

$$75B = 2250$$

$$B = \frac{2250}{75}$$

$$B = 30 \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) obtenemos:

$$A = \frac{1005-21B}{15}$$

$$A = \frac{1005-21(30)}{15}$$

$$A = \frac{1005-630}{15}$$

$$A = \frac{375}{15}$$

$$A = 25$$

Verificación:

$$25A + 30B = 1525 \qquad\qquad 15A + 21B = 1005$$
$$25(25) + 30(30) = 1525 \qquad\qquad 15(25) + 21(30) = 1005$$
$$625 + 900 = 1525 \qquad\qquad 375 + 630 = 1005$$
$$1525 = 1525 \qquad\qquad 1005 = 1005$$

Solución: $\begin{cases} A = 25 \\ B = 30 \end{cases}$

Así, podemos concluir que los asientos del primer piso del autobús cuestan B/. 25.00 y los del segundo piso B/. 30.00.

ACTIVIDAD N° 3.1

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método de igualación.

1. $\begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ 8x - 2y = 34 \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = \frac{31}{6} \\ 6x - y = \frac{43}{4} \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 18x + 24y = 25 \\ 10x - 6y = 1 \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -\frac{11}{4} \\ -\frac{7}{8}x + \frac{2}{3}y = \frac{19}{12} \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = -\frac{81}{31} \\ y = -\frac{155}{31} \end{cases}$

5. $\begin{cases} -7x - 6y = -57 \\ -8x + 2y = -12 \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{-41}{12} \\ \frac{7}{5}x - \frac{3}{4}y = -\frac{9}{5} \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = -\frac{327}{359} \\ y = \frac{1472}{359} \end{cases}$

7. En un mismo almacén y a un mismo precio, se han comprado 5 pantalones y 3 camisas a un costo de B/ 175.00. Y el día de hoy se compraron 6 pantalones con 8 camisas por la suma de B/. 320.00. ¿Cuánto cuesta cada pantalón y cada camisa?

$$R = \begin{cases} Pantalones = 20 \\ camisas = 25 \end{cases}$$

8. Por el buen rendimiento en la clase de Matemática de un grupo de 40 estudiantes, la dirección del colegio, ha obsequiado 3 lápices a cada niña y 2 bolígrafos a cada niño. La suma total entre lápices y bolígrafos obsequiados fue de 101. ¿Cuántos niños y niñas hay en la clase?

$$R = \begin{cases} Niñas = 21 \\ Niños = 19 \end{cases}$$

- **MÉTODO DE SUSTITUCIÓN**

Este es otro de los métodos que usualmente se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El procedimiento que se utiliza al aplicar este método es el siguiente:

1. Se ordenan (alfabéticamente) y enumeran las ecuaciones
2. Se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones.
3. El valor de la incógnita despejada, en el punto anterior, se sustituye en la otra ecuación.
4. Se resuelve la ecuación resultante (ecuación de una incógnita).
5. El valor numérico obtenido para la incógnita que estamos resolviendo, se sustituye en la ecuación encontrada en el punto 2, obteniendo así el valor numérico de la otra incógnita.

EJEMPLOS:

1.- $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$ Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución

SOLUCIÓN:

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} x + 3y = 6 & (1) \\ 5x - 2y = 13 & (2) \end{cases}$$

Despejamos x en la primera ecuación

$x + 3y = 6$

$x = 6 - 3y \qquad (3)$

Sustituyendo (3) en (2) así:

$5x - 2y = 13$

$5(6 - 3y) - 2y = 13$

$30 - 15y - 2y = 13$

$-15y - 2y = 13 - 30$

$-17y = -17$

$y = \frac{-17}{-17}$

$y = +1$

Sustituimos el valor de y en la ecuación (3)

$x = 6 - 3y$

$x = 6 - 3(+1)$

$x = 6 - 3$

$x = 3$

Verifiquemos los valores en las ecuaciones (1) y (2)

$x + 3y = 6$	$5x - 2y = 13$
$3 + 3(1) = 6$	$5(3) - 2(1) = 13$
$3 + 3 = 6$	$15 - 2 = 13$

$6 = 6$ $\quad\quad\quad\quad$ $13 = 13$

La solución es: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 32x - 25y = 13 \\ 16x + 15y = 1 \end{cases}$ Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución

SOLUCIÓN:

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} 32x - 25y = 13 & (1) \\ 16x + 15y = 1 & (2) \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación

$$32x - 25y = 13$$

$$-25y = 13 - 32x$$

$$y = \frac{13-32x}{-25} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) así:

$$16x + 15y = 1$$

$$16x + 15\left(\frac{13-32x}{-25}\right) = 1$$

$$16x + 3\left(\frac{13-32x}{-5}\right) = 1$$

$$16x + \frac{39-96x}{-5} = 1$$

$$-5(16x) + (-5)\left(\frac{39-96x}{-5}\right) = -5(1)$$

$$-80x + 39 - 96x = -5$$

$$-80x - 96x = -5 - 39$$

$-176x = -44$

$x = \frac{-44}{-176}$; $\quad x = \frac{1}{4}$

Sustituimos el valor de x en (3) obtenemos

$y = \frac{13-32x}{-25}$

$y = \frac{13-32\left(\frac{1}{4}\right)}{-25}$

$y = \frac{13-8}{-25}$

$y = \frac{5}{-25}$

$y = -\frac{1}{5}$

Verifiquemos los valores en las ecuaciones (1) y (2)

$32x - 25y = 13$	$16x + 15y = 1$
$32\left(\frac{1}{4}\right) - 25\left(-\frac{1}{5}\right) = 13$	$16\left(\frac{1}{4}\right) + 15\left(-\frac{1}{5}\right) = 1$
$8 + 5 = 13$	$4 - 3 = 1$
$13 = 13$	$1 = 1$

La solución es: $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$

2. Rosalyn compró en un mismo local y al mismo precio yardas de tela e hilo. Por 5 yardas de tela y 8 tubos de hilo pagó B/ 46.00. Mientras que por 7 yardas de la misma tela y 4 tubos del mismo hilo pagó B/. 50.00. ¿Cuánto cuesta la yarda de tela y cada tubo de hilo?

SOLUCIÓN:

Se plantea el sistema de ecuaciones: Sea t el precio de la yarda de tela y h el precio de cada tubo de hilo. Entonces:

$$\begin{cases} 5t + 8h = 46 \\ 7t + 4h = 50 \end{cases}$$

Apliquemos ahora el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones planteado.

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} 5t + 8h = 46 \quad (1) \\ 7t + 4h = 50 \quad (2) \end{cases}$$

Despejamos t en la primera ecuación

$$5t + 8h = 46$$

$$5t = 46 - 8h$$

$$t = \frac{46 - 8h}{5} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) así:

$$7t + 4h = 50$$

$7\left(\frac{46-8h}{5}\right)+4h=50$

$7(46-8h)+5(4h)=5(50)$

$322-56h+20h=250$

$-56h+20h=250-322$

$-36h=-72$

$h=\frac{-72}{-36}$

$h=+2$

Sustituimos el valor de h en (3) obtenemos

$t=\frac{46-8h}{5}$

$t=\frac{46-8(2)}{5}$

$t=\frac{46-16}{5}$

$t=\frac{30}{5}$

$t=6$

Verifiquemos los valores en las ecuaciones (1) y (2)

$5t+8h=46$	$7t+4h=50$
$5(6)+8(2)=46$	$7(6)+4(2)=50$
$30+16=46$	$42+8=50$
$46=46$	$50=50$

Solución: El precio de la yarda de tela es de B/. 6.00 y el del tubo de hilo es de B/. 2.00

ACTIVIDAD N° 3.2

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método de sustitución.

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ -6x + 4y = -16 \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -4x + 2y = -38 \\ 2x - 5y = 31 \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = 8 \\ y = -3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x - 5y = \frac{1}{3} \\ -7x - 9y = -\frac{13}{2} \end{cases}$ $R =$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x + 4y = -3 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = -\frac{3}{20} \end{cases}$ $R =$ $tiene\ infinitas\ soluciones$

6) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ $R = no\ tiene\ solución$

7) $\begin{cases} -6x + 8y = -20 \\ 3x - 5y = 14 \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x + 2y = \frac{13}{10} \\ -9x + 5y = -\frac{11}{20} \end{cases}$ $R = \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

9) Un granjero compró gallinas y cerdos. Por 5 gallinas y 10 cerdos pagó B/. 375.00 y por 11 cerdos y 9 gallinas pagó B/. 465.00. ¿Qué precio pagó por cada gallina y por cada cerdo?

$R = \begin{cases} gallinas = 15 \\ cerdos = 30 \end{cases}$

10) Para ver un juego de Béisbol se paga B/. 174.00 por 12 entradas de adulto y 11 de niño. Y por 7 entradas de adulto y 10 de niño se paga B/. 144. ¿Cuál es el valor de las entradas de adulto y de las entradas de niños?

$R = \begin{cases} Adultos = 9 \\ niños = 6 \end{cases}$

- **MÉTODO DE REDUCCIÓN:** La tercera técnica algebraica de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el método de reducción consta de los siguientes pasos:

1. Se ordenan (alfabéticamente) y se enumeran las ecuaciones
2. Se multiplican o dividen los dos miembros de las dos ecuaciones por los números que convengan para que una de las incógnitas tenga como coeficientes números opuestos.
3. Se restan las dos ecuaciones resultantes, con lo que se elimina una incógnita.
4. Se despeja la incógnita de la ecuación resultante.
5. Se repite el procedimiento para eliminar la otra incógnita
6. Se halla el valor de la segunda incógnita.

EJEMPLOS:

1.- $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$ Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de reducción.

SOLUCIÓN:

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} 6x - 5y = -9 & (1) \\ 4x + 3y = 13 & (2) \end{cases}$$

Inicialmente eliminaremos la variable y por lo tanto debemos multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 5, así:

$$\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{array}{l} 18x - \cancel{15y} = -27 \\ 20x + \cancel{15y} = 65 \\ \hline 38x \qquad\quad = 38 \end{array}$$

$$x = \frac{38}{38}$$

$$x = 1$$

Ahora eliminaremos la variable x por lo tanto debemos multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por -3, así:

$$\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{array}{r} \cancel{12x} - 10y = -18 \\ \cancel{-12x} - 9y = \ -39 \\ \hline -19y = \ -57 \end{array}$$

$$y = \frac{-57}{-19}$$

$$y = 3$$

Verifiquemos nuestros valores:

$$\begin{array}{ll} 6x - 5y = -9 & \quad 4x + 3y = 13 \\ 6(1) - 5(3) = -9 & \quad 4(1) + 3(3) = 13 \\ 6 - 15 = -9 & \quad 4 + 9 = 13 \\ -9 = -9 & \quad 13 = 13 \end{array}$$

La solución es: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$ Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de reducción.

SOLUCIÓN:

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} 7x - 15y = 1 \quad (1) \\ -x - 6y = 8 \quad\ \ (2) \end{cases}$$

Iniciamos eliminando la variable y por lo tanto debemos multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por -5, así:

$$\begin{array}{r} 2 \\ -5 \end{array}\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{array}{rcl} 14x - \cancel{30y} & = & 2 \\ 5x + \cancel{30y} & = & -40 \\ \hline 19x & = & -38 \end{array}$$

$$x = \frac{-38}{19}$$

$$x = -2$$

Ahora eliminaremos la variable x por lo tanto solo debemos multiplicar la segunda ecuación por 7, así:

$$\begin{array}{r} \\ 7 \end{array}\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{7x} - 15y & = & 1 \\ \cancel{-7x} - 42y & = & 56 \\ -57y & = & 57 \\ \hline \end{array}$$

$$y = \frac{57}{-57}$$

$$y = -1$$

Verifiquemos que se cumplen las igualdades para los valores encontrados:

$$\begin{array}{ll} 7x-15y=1 & -x-6y=8 \\ 7(-2)-15(-1)=1 & -(-2)-6(-1)=8 \\ -14+15=1 & +2+6=8 \\ 1=1 & 8=8 \end{array}$$

$$R=\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

3. Lorenzo pagó B/. 236.00 por 7 libros de Matemática y 9 de Español. Dalys compró 5 libros de Matemática y 12 libros de español y tuvo que pagar B/. 241.00. ¿Cuál es el precio de cada libro de Matemática y cada libro de Español?

SOLUCIÓN:

Se plantea el sistema de ecuaciones: Sea m el precio de cada libro de Matemática y e el precio de cada libro de Español. Entonces:

$$\begin{cases} 7m+9e=236 \\ 5m+12e=241 \end{cases}$$

Apliquemos ahora el método de reducción para resolver el sistema de ecuaciones planteado.

Enumeramos cada ecuación

$$\begin{cases} 7m+9e=236 & (1) \\ 5m+12e=241 & (2) \end{cases}$$

Iniciamos eliminando la variable m por lo tanto debemos multiplicar la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por -7, así:

$$\begin{array}{r} 5 \\ -7 \end{array}\begin{cases} 7m+9e=236 \\ 5m+12e=241 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{array}{r} \cancel{35m} + 45e = 1180 \\ -\cancel{35m} - 84e = -1687 \\ \hline 39e = -507 \end{array}$$

$$e = \frac{-507}{39}$$

$$e = 13$$

Ahora eliminaremos la variable e por lo tanto solo debemos multiplicar la primera ecuación por -4 segunda ecuación por 3, así:

$$\begin{array}{r} -28m - \cancel{36e} = -944 \\ 15m + \cancel{36e} = 723 \\ \hline -13m \qquad = -221 \end{array}$$

$$m = \frac{-221}{-13}$$

$$m = 17$$

Solución: El precio de cada libro de Matemática es de B/. 17.00 y el de Español es de B/. 13.

ACTIVIDAD N° 3.2

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método de reducción.

1. $\begin{cases} 3x + 5y = -14 \\ 2x - 2y = 12 \end{cases}$ $\quad R\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = \frac{17}{15} \\ \frac{1}{4}x - \frac{6}{5}y = -\frac{43}{30} \end{cases}$ $\quad R\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ -5x + y = -\frac{13}{6} \end{cases}$ $\quad R\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}y = \frac{19}{36} \\ -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad R\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 4y = \frac{6}{35} \\ 3x + 2y = -\frac{31}{35} \end{cases}$ $\quad R\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + y = 4y - 4x - 2 \\ -3x + 5y - 14 = 2x - y \end{cases}$ $\quad R\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

7. Para entrar al cine 7 adultos y 4 niños deben pagar B/. 76.00 y para entrar 6 adultos y 6 niños se paga B/. 78.00. ¿Cuál es el costo de la entrada al cine para los adultos y para los niños?

   $R\begin{cases} adultos = 8 \\ niños = 5 \end{cases}$

8. Johanna compró 12 faldas y 9 blusas por la suma de B/ 249.00. El mismo día y con los mismos precios Keithleen compró 10 pantalones y 11 blusas por lo que pagó B/. 239.00. ¿Cuál es el precio de cada pantalón y de cada blusa?

   $R\begin{cases} pantalón = 14 \\ blusa = 9 \end{cases}$

3 | TRIGONOMETRÍA

TEMA 4. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

Se ha preguntado alguna vez…

¿cuál es el origen del estudio de los ángulos y de los triángulos?

¡Hagamos un poco de Historia!

En sus orígenes prácticos los babilonios y los egipcios utilizaban los ángulos y los triángulos para efectuar medidas en la agricultura y en la construcción de edificios; con el estudio de ellos, también se predecían las rutas y posiciones de los cuerpos celestes, la exactitud en la navegación y el cálculo del tiempo y los calendarios. Todas estas relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos para medir distancias y extensiones de terreno por triangulación son estudiadas por la trigonometría la cual, etimológicamente, significa Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρ'ια) medida, es decir, "medida de tres ángulos".

"Los babilonios determinaron aproximaciones de medidas de ángulos o de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos. Varias tablas grabadas sobre arcilla lo testimonian. Por ejemplo, una tablilla babilonia escrita en cuneiforme, denominada Plimpton 322 ***(en torno al 1900 a. C.)*** *muestra quince ternas pitagóricas y una columna de números que puede ser interpretada como una tabla de funciones trigonométricas (Figura1); sin embargo, existen varios debates sobre si, en realidad, se trata de una tabla trigonométrica.*

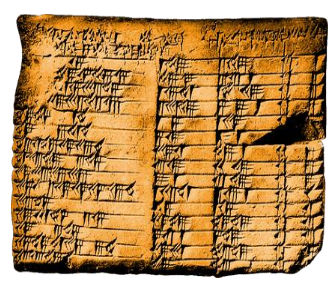


Figura 1. Tablilla babilonia escrita en cuneiforme

Los egipcios dividieron a los 360 grados de la eclíptica en 36 secciones de 10 grados cada uno. (Figura 2). Esta división era 2300 años a. C. cada sección de diez grados (llamado decano de la palabra griega diez) contenía una constelación de estrellas, alineadas a lo largo de la eclíptica. Dado que la Tierra realiza una rotación completa en 24 horas, las estrellas en un nuevo decanato se levantarán sobre el horizonte más o menos cada 40 minutos. El sistema de decanos se utilizó para determinar las horas de la noche y las estaciones".[1]

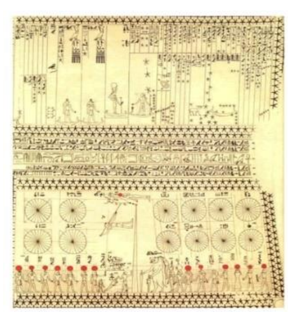


Figura 2. División de 360° de la eclíptica en 36 secciones de 10° cada una.

[1] El contenido de este apartado y la figura 1 y 2, se obtuvieron de: https://www.sutori.com/story/historia-de-la-trigonometria-y-la-medicion-de-angulos--x2eV7wdjMVR8ByA53oB7Eaxc

La función principal de la trigonometría es que nos permite conocer cuánto miden los ángulos internos de un triángulo con tan solo conocer las longitudes de dos lados del triángulo, o bien conocer cuánto miden los lados y ángulos de un triángulo solamente conociendo cuánto miden un ángulo y un lado del mismo.

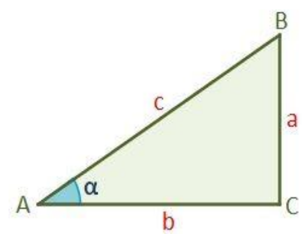
En trigonometría se trabaja con triángulos rectángulos en los que un ángulo es recto de 90° y los otros tienen que sumar entre los dos 90° (para cumplir con la ley de los 180°).

TEOREMA*: *La suma de las medidas de los tres ángulos internos de cualquier triángulo es 180°. $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

- Las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas de un ángulo α *son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo.*

Triangulo Rectángulo: es el triángulo que tiene un ángulo recto o de 90°.



Sea α (alfa) uno de los ángulos agudos del triángulo **rectángulo**,

- El **seno** de un ángulo α se define como la razón entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c).

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

- El **coseno** de un ángulo α se define como la razón entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y la hipotenusa (c).

$$\cos \alpha = \frac{\textit{cateto contiguo}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

- La **tangente** de un **ángulo** α es la **razón** entre el cateto opuesto (a) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b).

$$\tan \alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto contiguo}} = \frac{a}{b}$$

- La **cosecante** de α, se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto opuesto (a).

$$\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

- La **secante** de α. Se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b).

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{b}$$

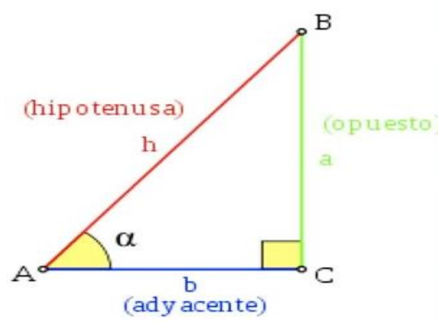
- La **cotangente** de α. se define como la razón entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y el cateto opuesto (a).

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$$



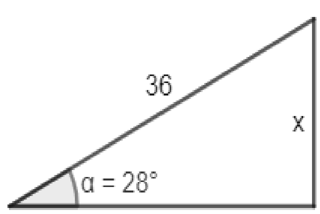
Puedes usar la palabra SOCATOA para recordar las funciones trigonométricas.

$$S\frac{o}{h}C\frac{a}{h}T\frac{o}{a}$$

Ejemplos:

Calcular el valor de x de cada figura utilizando las razones trigonométricas:

Figura 1



Solución:

Conocemos la hipotenusa y el ángulo. Como queremos calcular el lado opuesto, utilizamos el **seno**:

$$\sin\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa}$$

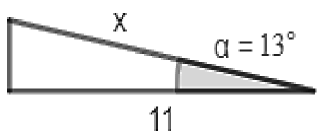
$$\sin(28)° = \frac{x}{36}$$

$$x = 36 \cdot \sin 28$$

$$x = 16\ 900$$

Respuesta: El lado mide, aproximadamente, 16 900.

Figura 2:



Solución:

En esta figura conocemos el lado contiguo y el ángulo.

Para calcular la hipotenusa, utilizamos el **coseno**:

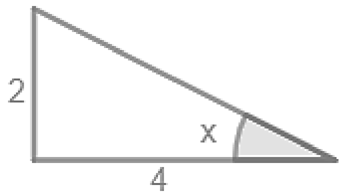
$$\cos\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa}$$

$$\cos 13° = \frac{11}{x}$$

$$x = \frac{11}{cos 13°} = 11\ 289$$

Respuesta: La hipotenusa(x) mide aproximadamente 11 289.

Figura 3



Solución: Como conocemos el lado opuesto y el contiguo al ángulo, utilizamos la tangente:

$$\tan \alpha = \frac{opuesto}{adyacente}$$

$$\tan x = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$x = \tan^{-1}(0.5) = 26.565°$$

Respuesta: El ángulo mide, aproximadamente, 26.565°.

- ## Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo consiste en calcular seis elementos: los tres lados y los tres ángulos. Para ello necesitamos conocer tres de estos seis elementos y uno de los datos por lo menos sea un lado. Como el triángulo es rectángulo (un ángulo es 90º) basta conocer dos de sus elementos, uno de los cuales debe ser un lado.

Si conocemos dos lados del triángulo, podemos calcular el otro aplicando el teorema de Pitágoras.

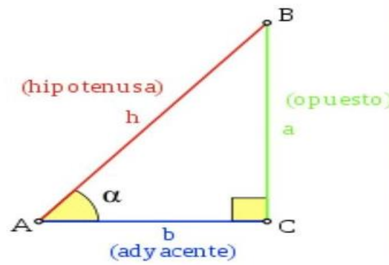
El teorema de Pitágoras**:** $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$

Sin embargo, en ocasiones no conocemos dos lados, pero sí conocemos uno de los otros dos ángulos no rectos. En estos casos es cuando utilizamos el seno y el coseno.

$$\sin \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

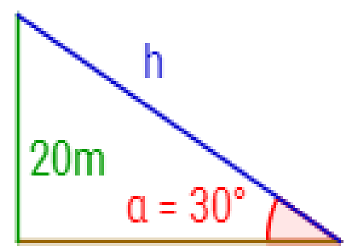
$$\cos \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$$



Ejemplos:

Problema 1: Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que parte de la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme un ángulo de 30º. Calcular el precio del cable si cada metro cuesta B/.12,00



Solución: Como conocemos el ángulo ***α*** y el lado opuesto a dicho ángulo, utilizamos el seno para calcular la hipotenusa del triángulo:

$$\sin \alpha = \frac{c.opuesto}{hipotenusa}$$

$$\sin 30° = \frac{20\ m}{h}$$

$$h = \frac{20\ m}{\sin 30°}$$

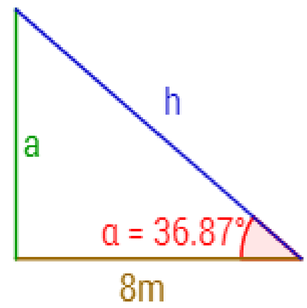
$$h = \frac{20\ m}{\sin 30°}$$

$$h = 40\ m$$

$$(40)(B/.12{,}00) = \ B/.480{,}00$$

Respuesta: El cable debe medir 40 metros y su precio es de $B/.480{,}00$

Problema 2: Calcular la altura **a**, de un árbol sabiendo que, si nos situamos 8 metros de la base del tronco, vemos la parte superior de su copa en un ángulo de 36.87º.



Como la altura **a** es el cateto opuesto al ángulo, utilizaremos el seno:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\alpha) = \frac{a}{h} \rightarrow \\ a = h \cdot \sin(\alpha) \end{array}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{h}$$

Pero como necesitamos calcular la hipotenusa h del triángulo, utilizamos el coseno:

Sustituimos los datos:

$$\cos(36,87°) = \frac{8}{h}$$

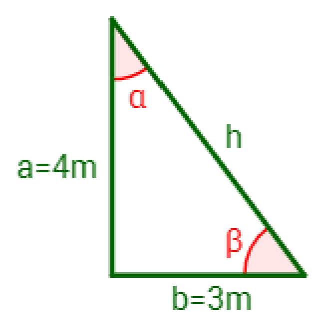
$$h = \frac{8}{\cos(36{,}87°)} = \frac{8}{0.799} = 10{,}01$$

Por tanto, la altura del árbol es:

$$a = h \cdot \sin(\alpha) = 10{,}01 = \sin(36,87°) = 10.01 \cdot 0,6 = 6,006\ m.$$

Respuesta: La altura del árbol es 6,006 m.

Problema 3: Del siguiente triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos: uno mide 4m y el otro mide 3m. Calcular la hipotenusa y los ángulos α y β.



Como el triángulo es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa: $h^2 = a^2 + b^2$

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2} =$$

$$= \sqrt{25} = 5m$$

Respuesta: La hipotenusa mide 5 metros.

Para calcular los ángulos podemos utilizar, por ejemplo, el seno:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{h}$$

$$\sin(\beta) = \frac{a}{h}$$

Como conocemos los catetos y la hipotenusa, podemos calcular el seno de los ángulos:

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5} = 0,6$$

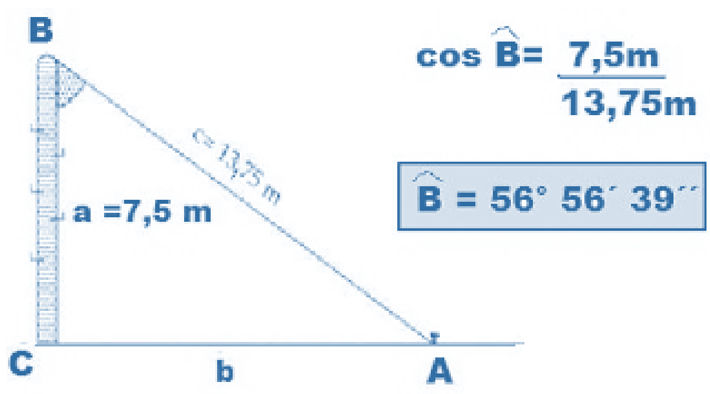
$$\sin(\beta) = \frac{4}{5} = 0,8$$

Finalmente, para calcular los ángulos sólo debemos utilizar la función arcoseno:

$$\alpha = \sin^{-1} 0,6 = 36,869$$

$$\beta = \sin^{-1} 0,8 = 53,13°$$

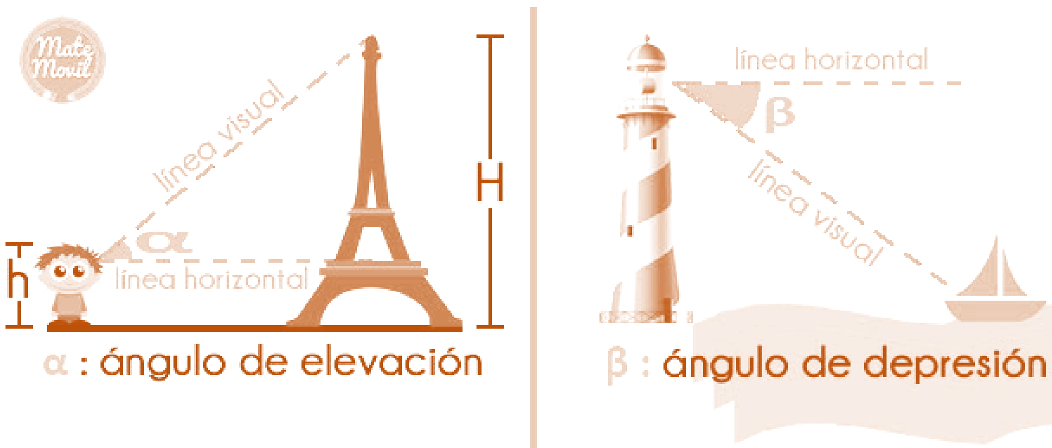
Problema 4: Obtener el ángulo que forma un poste de 7,5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero, hasta el piso, y que tiene un largo de 13,75 m.

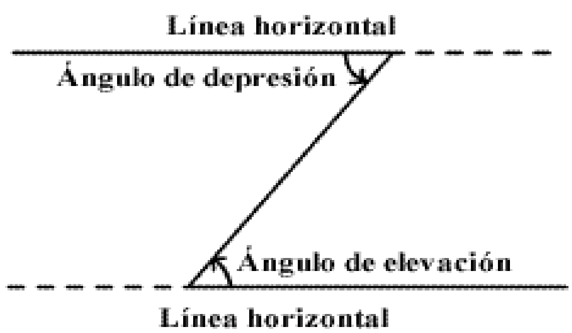


- ## Ángulos de elevación y de depresión

Los ángulos verticales son aquellos que están ubicados en un plano vertical, y están **formados por una línea visual y una línea horizontal**. Estos ángulos pueden ser de 2 tipos: **ángulos de elevación y ángulos de depresión.**

En la siguiente imagen podemos apreciar **en qué consisten los ángulos de elevación y depresión**:





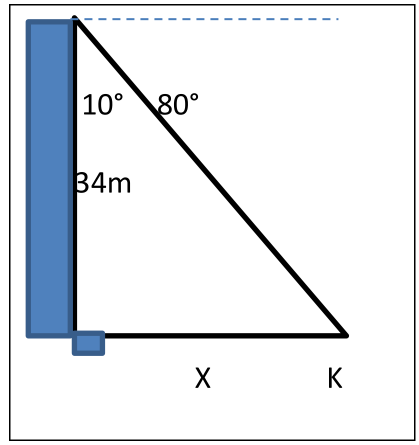
El ángulo de elevación y el ángulo de depresión son congruentes.

> Sea α y β dos ángulos, éstos serán ángulos congruentes si tienen exactamente la misma medida, es decir, $\alpha = \beta$.

Ejemplo 1. La medida del ángulo de depresión desde lo alto de una torre de 34 m de altura hasta un punto K en el suelo es de 80° . Calcule la distancia aproximada del punto K a la base de la torre.

Solución:

a) Se dibuja una figura representativa de la situación.



b) Se plantea la razón trigonométrica tangente del ángulo que mide 10° para encontrar el valor de x.

$$\tan \theta = \frac{c.o.}{c.a.}$$

$$\tan 10° = \frac{x}{34}$$

$$34 \cdot \tan 10° = x$$

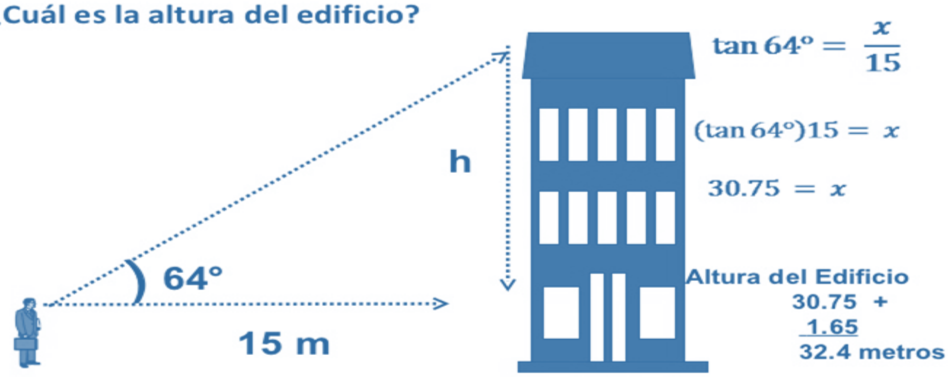
$$x = 6$$

c) Se da respuesta al problema planteado: La distancia aproximada desde el punto K a la base de la torre es de 6m.

Ejemplo 2.

Un observador, cuya estatura es de 1.65 metros se aleja 15 metros de la base de un edificio y desde esta posición dirige la vista al punto mas alto de la fachada de dicho edificio. Si el dicho edificio. Si el ángulo de elevación es de 64°

¿Cuál es la altura del edificio?



Ejemplo 3.

De la cima de un faro de 8 m de alto se divisa una lancha con un ángulo de depresión de 8° calcula la distancia entre la lancha y el pie del faro.

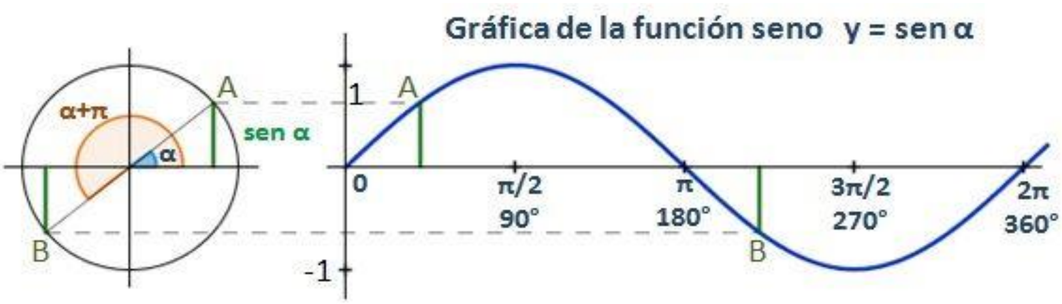
$$tg\ 8° = \frac{D}{8\ m}$$

$$tg\ 8° \ .\ 8\ m = D$$

$$\boxed{D = 1{,}12\ m}$$

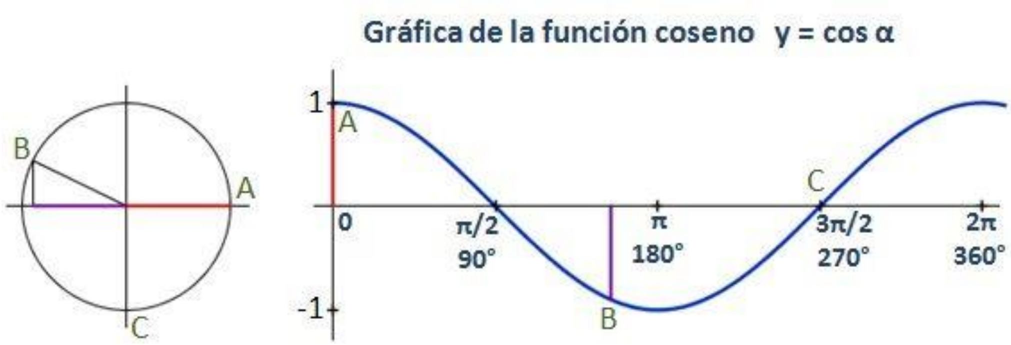
- ## Gráficas de las funciones trigonométricas

- LA **GRÁFICA** DE LA FUNCIÓN SENO ES:



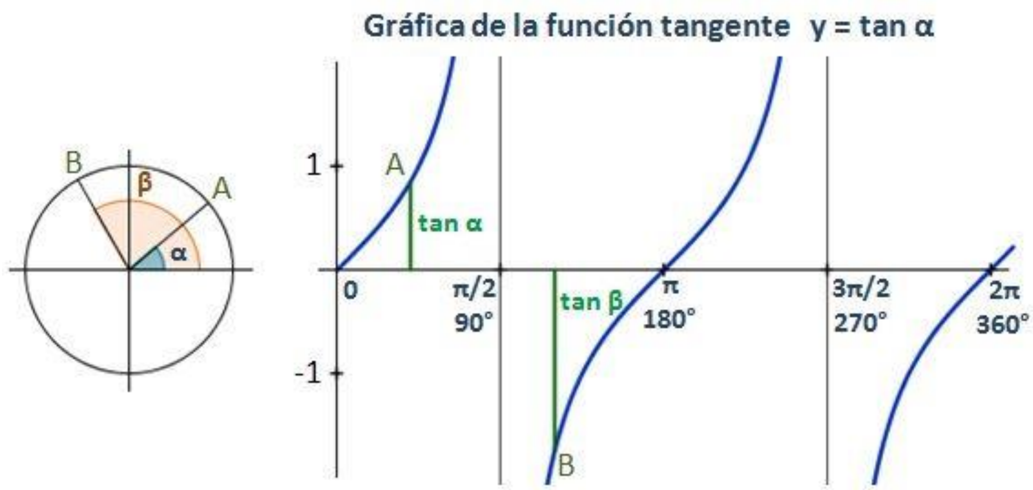
La función del **seno** es **periódica** de período 360º (2π radianes)

- LA **GRÁFICA** DE LA FUNCIÓN COSENO ES:



La función del **coseno** es **periódica** de período 360º (2π radianes).

- LA **GRÁFICA** DE LA FUNCIÓN TANGENTE ES:

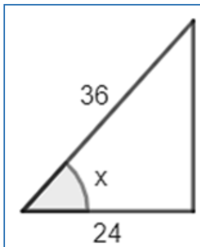
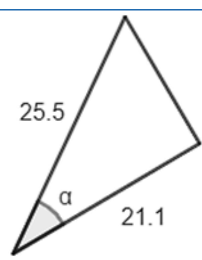
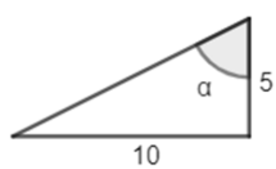
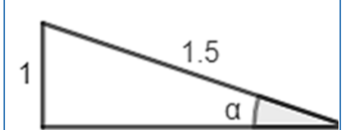


ACTIVIDAD N° 4.1

Indicaciones:

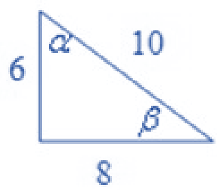
- ✓ *Realice los ejercicios propuestos aplicando las razones trigonométricas.*
- ✓ *Resuelva en forma clara y ordenada.*

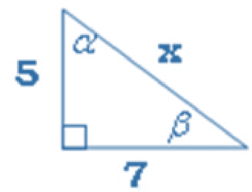
1. Calcule el valor de **x** o de $\boldsymbol{\alpha}$, según se indique en cada figura, utilizando las razones trigonométricas:

2. En los siguientes triángulos rectángulos, determina el valor de las 6 razones trigonométricas para el ángulo agudo $\boldsymbol{\beta}$.

El teorema de Pitágoras: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$



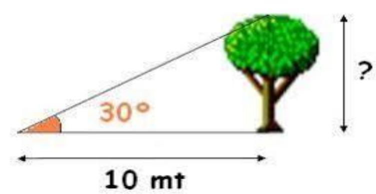


ACTIVIDAD N° 4.2

Indicaciones:

- ✓ *Realiza los ejercicios propuestos aplicando las funciones trigonométricas.*
- ✓ *Resuelve en forma clara y ordenada.*
- ✓ *De la respuesta en forma de oración.*

1. Determina la altura del árbol, sabiendo que su sombra mide 10 m, cuando el ángulo de elevación del sol es de 30°.

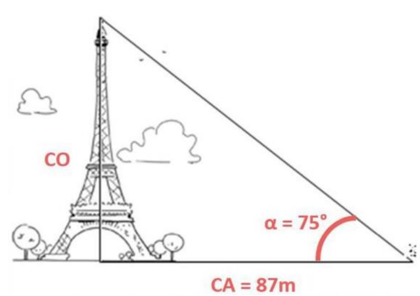


2. Un árbol proyecta una sombra de 17 m de longitud. Desde el punto del terreno donde termina la sombra, el ángulo de elevación (formado por la horizontal y la visual dirigida a un objeto, cundo éste está sobre la horizontal) del extremo superior del árbol es de 52°. ¿Cuál es la altura del árbol? Haga el dibujo.

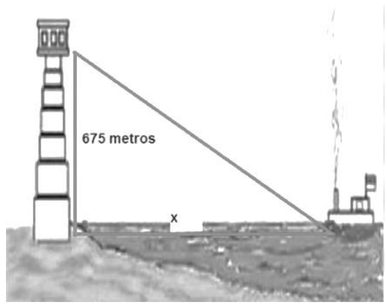
3. Encuentra la altura H de un árbol si se sabe que la longitud de su sombra es de 120 cm. Además, el ángulo que forman los rayos del sol con la horizontal es de 45º. Dibuje el triángulo rectángulo.

4. Marcos mide 1.72 metros de estatura y su sombra 1.54 metros de longitud, ¿Qué ángulo forman en ese instante los rayos del sol con la horizontal? Dibuje el triángulo rectángulo.

5. Observa la figura y determina la altura de la torre.

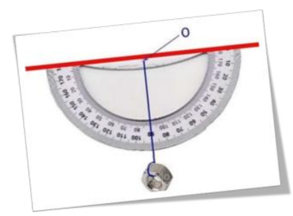


6. Un faro está ubicado sobre la playa. El faro tiene una altura de 675 metyros. Desde lo alto del faro y en un ángulo de depresión de 76° se divisa una embarcación. ¿A qué distancia de la base del faro se encuentra la embarcación?



ACTIVIDAD N° 4.3

CONSTRUCCIÓN Y USO DE UN GONIÓMETRO CASERO



Objetivo: Calcular alturas de edificios o cualquier elemento de difícil medición o directamente inaccesible.

Primera fase: Construya el teodolito casero o goniómetro.
Segunda fase: Mida un edificio o monumento de su comunidad.

- Elegir dos edificios u otros elementos de altura dentro de tu comunidad.
- Realizar las mediciones de longitudes y de ángulos y anotar los datos.

> Después de escoger el edificio, mida una distancia desde ese objeto hasta el observador, luego el observador mira por el goniómetro la punta más alta del edificio u objeto escogido y mide el ángulo de inclinación, luego mide la altura del observador hasta su visión y llena la tabla con los datos recogidos. Después de obtener todos los datos y realizar los cálculos necesarios para obtener la altura total del edificio, se puede realizar varias veces todo el proceso y calcular el promedio de todos los datos.

-
- Documente las mediciones y describa dicho proceso.

Tercera fase: Realice los cálculos e indique las alturas de los edificios medidos.

- Vea videos en YouTube sobre el uso del goniómetro y el cálculo de alturas aplicando la trigonometría.
- Investigue la historia de alguno de los edificios o monumentos medidos.
- Complete: la tabla de datos y resultados.
- Escriba sus conclusiones y reflexiones sobre lo aprendido en esta actividad.

TABLA DE DATOS Y RESULTADOS

Edificio	Distancia del observador al edificio, en metros. (**d**)	Ángulo de inclinación (**α**)	Ángulo de elevación ($\theta = 90° - \alpha$)	Altura del observador (**h_1**)	Altura calculada (**h_2**)	Altura total del edificio (**h_T**)
	d=	**α=**	$\theta = 90° - \alpha$ $\theta =$	$h_1 =$	$\tan\theta = \frac{h_2}{d}$ $h_2 = d \cdot \tan\theta$ $h_2 =$	$h_T = h_1 + h_2$ $h_T =$
	d=	**α=**	$\theta = 90° - \alpha$ $\theta =$	$h_1 =$	$\tan\theta = \frac{h_2}{d}$ $h_2 = d \cdot \tan\theta$ $h_2 =$	$h_T = h_1 + h_2$ $h_T =$

CONCLUSIONES Y RFEFLEXIONES

ACTIVIDAD N° 4.4

__Indicaciones__: Construya una gráfica de $y = sen\,\theta$, para valores: $0° \leq \theta \leqq 360°$ cada 30°.

a) Tabla de valores (redondea hasta las centésimas)

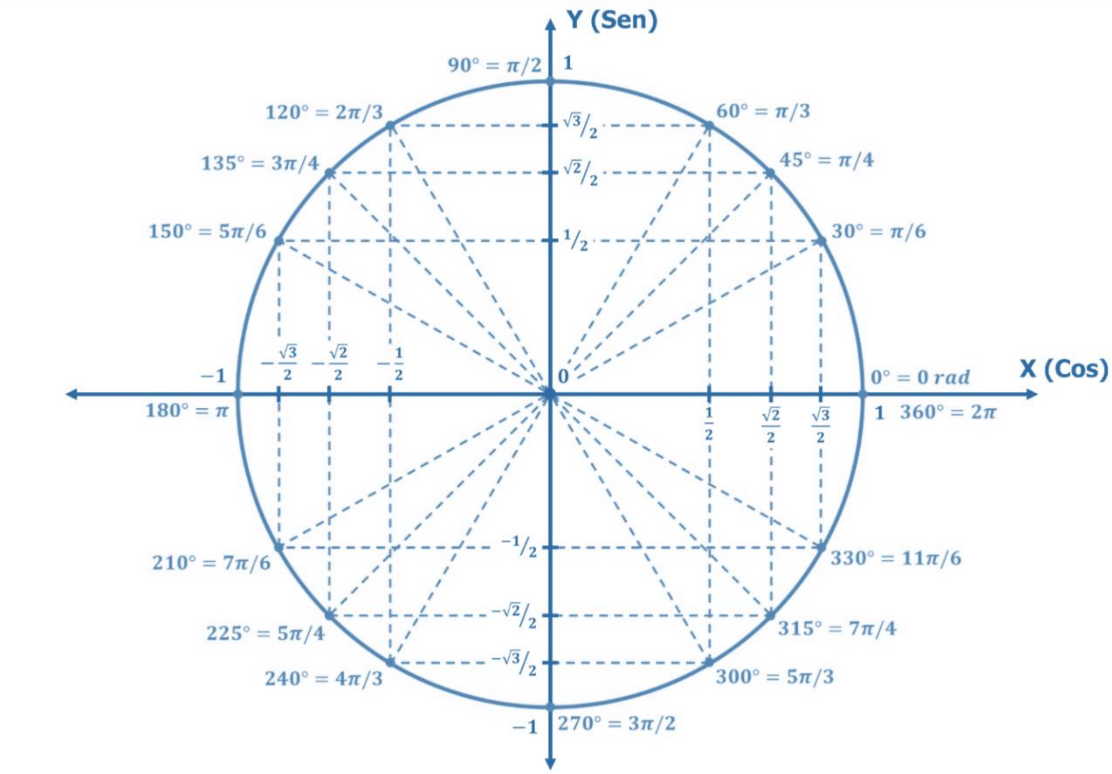
X	θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
Y	$sen\,\theta$													

b) Gráfica de $y = sen\,\theta$

ACTIVIDAD DE AUTOEVALAUCIÓN.

Desarrolle las siguientes actividades de repaso sobre la historia de la trigonometría y conceptos básicos.

1. Observe el video historia de la trigonometría en el canal de YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=Xh73G2rVFfo
   a) Realice según lo aprendido en el video un mapa conceptual de la historia de la trigonometría cronológicamente. Realice el mapa en hoja tamaño carta, blanca.
2. Observe el círculo unitario[2] y completa las siguientes tablas:



a) Complete la tabla y los valores del círculo unitario con los datos anteriores:

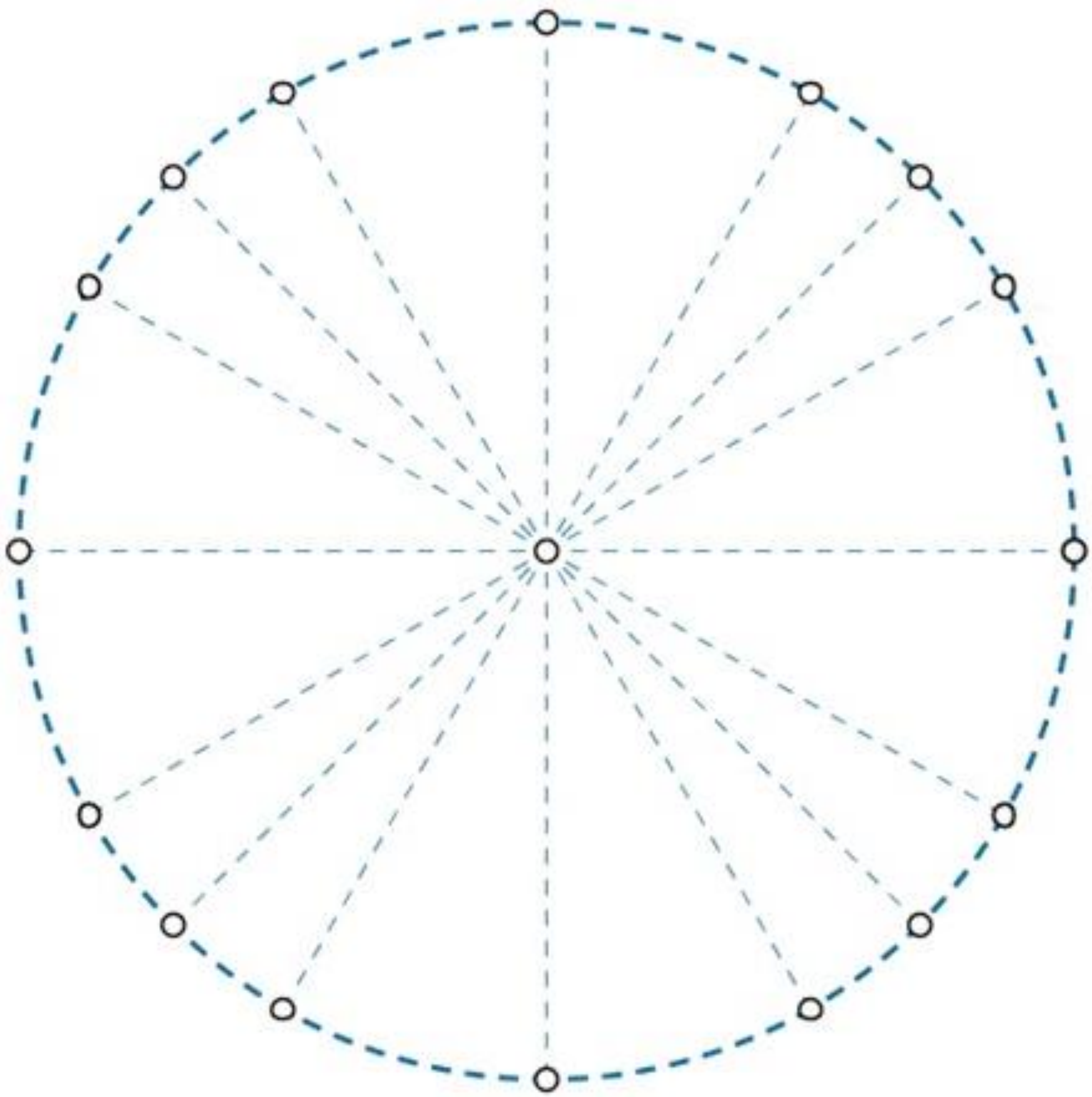
Ángulo	30	45°	60°	90°	180°	225°	270°	315°	360°
Radianes	π/6								

b) Determine los valores de la función seno y coseno:

	30	45°	60°	90°	180°	225°	270°	315°	360°
y=sen ϴ	½								
x=cos ϴ			½						

[2] https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html

3. Construya su propio círculo unitario. Coloque los ángulos y radianes. Personalícelo.



¡Genial! Ha culminado el Tema 4

4 | ESTADÍSTICA

TEMA 5. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

- Objetivos de la estadística

La estadística es una ciencia, que ayuda al individuo a tomar decisiones. Parte de una problemática a la que aspiramos dar respuesta. Puede conectarse con actividades que se apliquen en el área científica, en el área humanística y en el área tecnológica, en el comercio, la industria, la salud, entre otros.

En el siguiente gráfico hemos resumido los componentes que desarrollamos, mediante el uso de estadística en nuestras clases, donde Tauber (2020) muestra que la estadística tiene como objetivos: impulsar la reflexión y el pensamiento crítico. Así mismo, observamos que inducen a los alumnos a interpretar, comprender, indagar, investigar, generalizar entre otros según los niveles educativos.

- Áreas de la Estadística.

La metodología estadística se divide en dos áreas como:

1. **Estadística descriptiva:** esta área se imparte en los grados de la educación básica de nuestro sistema educativo. Se encarga de representar, analizar e interpretar las características de una población, mediante las presentaciones estadísticas.

La estadística como herramienta para el análisis e interpretación.

Promover la mirada a la enseñanza y aprendizaje de la estadística, es muy relevante.

Está conectada a los procesos o diseños de investigación que nos arrojan los indicadores que permiten hacer análisis e interpretaciones utilizando recursos tecnológicos al alcance de los alumnos.

La enseñanza de la estadística en nuestras aulas ha tomado relevancia desde que se implementa la planificación por competencias en nuestro país; como ciencia interdisciplinar induce al desarrollo de las visualización y comprensión lectora de los alumnos, entre otros y sus actividades promueven la atención a la diversidad.

2. **Estadística Inferencial o inductiva:** estima con base a la probabilidad de un evento, infiere hace predicciones y permite obtener conclusiones de una muestra o población estudiada. Esta área se imparte en los grados de la educación media y superior.

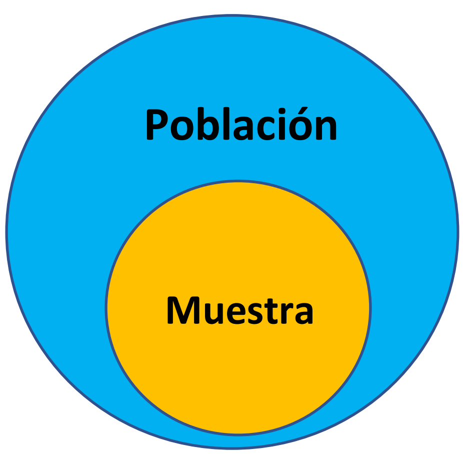
• Conceptos elementales de la estadística

Los indicadores que recabamos mediante los diferentes instrumentos de recolección de datos, nos sirven para medir a un país o a un sector, tanto en el comercio o en las investigaciones de mercados o los que aplicamos procesos de inteligencia comercial.

Los datos e indicadores que miden el producto de una empresa, de un mercado o un departamento nos permiten analizar desde diversos enfoques y según la necesidad podríamos medir las exportaciones o importaciones de una empresa y proponer mediante las estadísticas, estrategias de mercados. Por lo cual podemos realizar el análisis de un producto, análisis de un mercado, análisis de una empresa, en análisis de un sector económico, entre otros.

a) **Población estadística**: En estadística, el término "población" se refiere al conjunto de elementos que se quiere investigar, estos elementos pueden ser objetos, acontecimientos, situaciones o grupo de personas.

b) **Muestra**: En estadística, una muestra es un subconjunto de casos o individuos de una población. En diversas aplicaciones interesa que una muestra sea, representativa y para ello debe escogerse una técnica de muestra adecuada, que produzca una muestra aleatoria adecuada. También es un subconjunto de la población, y para ser representativa, debe tener las mismas características de la población.



Censo: estudio que se realiza a la población.

Muestreo: estudio que realiza a una parte de la

c) **Tipos de presentaciones estadísticas**: En los análisis estadísticos, es frecuente utilizar representaciones visuales complementarias de las tablas que resumen los datos de estudio. Con estas representaciones, adaptadas en cada caso a la finalidad informativa que se persigue, se transmiten los resultados de los análisis de forma rápida, directa y comprensible para un conjunto amplio de personas.

d) **Tipos de representaciones gráficas**: Cuando se muestran los datos estadísticos a través de representaciones gráficas, se ha de adaptar el contenido a la información visual que se pretende transmitir. Para ello, se barajan múltiples formas de representación:

- **Diagramas de barras**: muestran los valores de las frecuencias absolutas sobre un sistema de ejes cartesianos, cuando la variable es discreta o cualitativa.
- **Histogramas**: formas especiales de diagramas de barras para distribuciones cuantitativas continuas.
- **Polígonos de frecuencias**: formados por líneas poligonales abiertas sobre un sistema de ejes cartesianos.
- **Gráficos de sectores**: circulares o de tarta, dividen un círculo en porciones proporcionales según el valor de las frecuencias relativas.
- **Pictogramas**: o representaciones visuales figurativas. En realidad, son diagramas de barras en los que las barras se sustituyen con dibujos alusivos a la variable.
- **Cartogramas**: expresiones gráficas a modo de mapa.
- **Pirámides de población**: para clasificaciones de grupos de población por sexo y edad.

e) **Variables cualitativas**: Es aquel tipo de variable estadística que describe cualidades, características y/o circunstancias de algún objeto, persona o eventualidad, sin el uso de números, es decir expresa una categoría no numérica, por ejemplo, el sexo (femenino o masculino) de un individuo. También se les conoce como variables categóricas, y en palabras más simples son variables que no apalean un sentido natural de orden, se miden bajo una escala nominal.

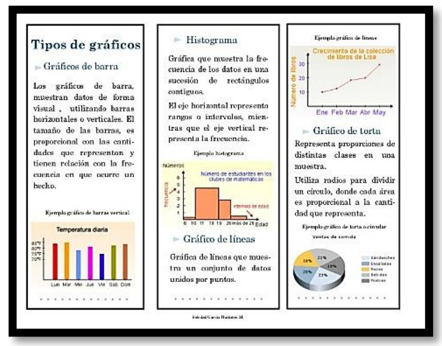
- **Variable cualitativa ordinal o variable cuasi cuantitativa:** La variable puede tomar distintos valores ordenados siguiendo una escala establecida, aunque no es necesario que el intervalo entre mediciones sea uniforme, por ejemplo: leve, moderado, fuerte.
- **Variable cualitativa nominal**: En esta variable los valores no pueden ser sometidos a un criterio de orden, como por ejemplo los colores o el lugar de registro.

f) **Variable cuantitativa:** son las que tienen la capacidad de adoptar valores numéricos, cualquier tipo de cifra, brindando un mayor entendimiento a los resultados de las estadísticas, ya que dan un valor bastante exacto. Dentro de las variables cuantitativas se pueden encontrar a su vez diferentes tipos que se determinan dependiendo de la precisión del instrumento empleado para medirlo.

ACTIVIDAD N°5.1

I. Cuestionario. Responda las siguientes preguntas en un tríptico creativo de estadística.

Instrucciones: Use hoja blanca o de color y con **letra legible** responda las preguntas. Recuerde confeccionar una portada y responda las preguntas de forma de forma ordenada y con mucha creatividad.



1. ¿Cómo se aplica la estadística en su bachiller?

2 ¿Cómo se aplica la estadística en el comercio? De un ejemplo.

3. Busque en YouTube o mire este VIDEO DE ¿cómo representar los datos? y realice una síntesis de una página de:

a) ¿Qué instrumentos utilizamos para recoger datos?
b) ¿Cómo podemos representar los datos? Mencione una herramienta tecnológica
c) ¿Cuáles son las medidas de tendencia central?
d) ¿Cuáles son as medidas de variación y dispersión?
e) ¿Qué es un supuesto o hipótesis?
f) ¿En qué tipos de estudios se plantea una hipótesis, describa brevemente?

II. Glosario. Defina e ilustre en su cuaderno los siguientes conceptos[3]. Busque en diferentes textos en línea.

a) Datos
b) Población estadística
c) Muestra
d) Tipos de presentaciones estadísticas
   - Diagramas de barras
   - Histogramas
   - Polígonos de frecuencias
   - Gráficos de sectores

[3]http://www.azatrade.info/noticias/wp-content/uploads/2019/05/2_Estad%C3%ADsticaAplicada.pdf

  - Pictogramas
  - Cartogramas
  - Pirámides de población

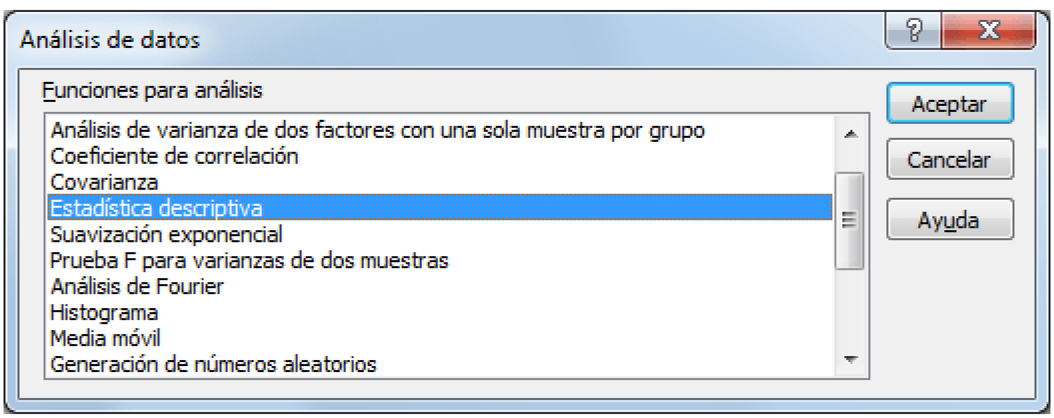
e) Variables cualitativas
f) Variable cuantitativa.
g) Medidas de tendencia Central
h) Medidas de dispersión
i) Prueba de hipótesis
j) Tablas

ACTIVIDAD N°5.2

Crea un breve Tutorial **¡ÁNIMO!**

Instrucciones:

1) Utiliza Word o PowerPoint y construye un breve tutorial del cálculo de las medidas de dispersión y de tendencia central en Excel.
2) Le recomendamos buscar la herramienta análisis de datos.
3) Tomar la imagen de los pasos.



¡Felicidades! Culminamos todas las unidades de la guía de autoaprendizaje

KHAN ACADEMY

Khan Academy

- Aprendemos, reforzamos y atendemos a la diversidad

Le recomendamos practicar durante la semana, una hora en la plataforma más popular del mundo para aprender matemáticas. Visite esta y otras actividades, busque pistas, vea videos y refuerce los contenidos. Es totalmente gratuita. Podrá registrarse con su correo electrónico en https://es.khanacademy.org/.

Empecemos con la HORA DE KHAN ACADEMY

TEMA1:

1. **Identidades trigonométricas**

https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trig-equations-and-identities/using-trig-identities/v/examples-using-pythagorean-identities-to-simplify-trigonometric-expressions?modal=1

2. **Identidad Pitagórica**

https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles/intro-to-the-pythagorean-identity/v/pythagorean-trig-identity-from-soh-cah-toa?modal=1

3. **Introducción a la forma pendiente-ordenada al origen**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:intro-to-slope-intercept-form/e/slope-from-an-equation-in-slope-intercept-form

4. **Grafica a partir de la pendiente ordenada al origen**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:graphing-slope-intercept-equations/e/graph-from-slope-intercept-equation

5. **La forma punto-pendiente**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:point-slope-form/e/converting_between_point_slope_and_slope_intercept

6. **Convierte ecuaciones lineales a la forma estándar**

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:standard-form/e/converting_between_slope_intercept_and_standard_form

CURSOS GRATUITOS DE GEOGEBRA

Descarga curso inicial y avanzado en:

https://www.oei.es/Educacion/recursoseducativosoei/formaciondocente

AUTOEVALUACIÓN A-1

Estimados Alumnos(as): con el propósito de favorecer el desarrollo de la guía de aprendizaje, le presentamos la autoevaluación de la misma.

La autoevaluación induce a que "los alumnos desarrollen el hábito de la reflexión, y la identificación de los propios errores, cuestión fundamental cuando se trata de formar personas con capacidad para aprender de forma autónoma". (Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. 2005, p.27)

La siguiente tabla debe ser completada al culminar todos los temas, evalúese y propóngase nuevas metas en el aprendizaje. Las preguntas van conectadas a una escala que usted considerará según el trabajo realizado hasta el momento. Esta evaluación es cualitativa.

- Al completar la unidad 1, autoevalúese según la siguiente escala de logros:

Lo he logrado	Lo estoy logrando	Estoy intentando lograrlo	No lo he Logrado
5	4	3	2

AL CONCLUIR LA UNIDAD 1 DEL GUÍA DE APRENDIZAJE CONSIDERO QUE:	COLOQUE UN NÚMERO SEGÚN LA ESCALA
En la asimilación de todos los conceptos.	
En la actitud positiva ante los retos al desarrollar los ejercicios.	
En incrementar mi curiosidad por investigar y descubrir cosas nuevas.	
En mejorar mi capacidad para resolver problemas.	
En hacer buen uso de las TIC's para profundizar e investigar con las diferentes plataformas educativas.	
En seguir las indicaciones y sugerencias del guía de aprendizaje.	
En hacer buen uso del tiempo para resolver las tareas.	
En conectar los temas con la vida diaria.	
TOTAL DE PUNTOS →	

BIBLIOGRAFÍA

Editorial Santillana (2015). Matemática 11. Serie Ser Competentes.

González Gaitán, A. E. (2008). *Matemática 11.* Panamá: Susaeta Ediciones Panamá, S.A.

Rees, P. & Sparks, F. (1995). *Trigonometría.* México: Revertè Ediciones S.A. de C.V.

Números Complejos . (s.f.). Obtenido de http://www.mate.unlp.edu.ar/practicas/78_17_20112019172028.pdf

Oteyza, E., et al. (2005). Geometría Analítica. México: Pearson Educación.

Rivera, F. (2001). Una introducción a los números complejos. Mérida.

Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. (2005, septiembre). Autoevaluación y co-evaluación: estrategias para facilitar la evaluación continuada. In *Actas del Simposio Nacional de Docencia en Informática (SINDI), Granada* (pp. 25-32).

Zill, D. y Dewar, J. (2012). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (3ª ed.). MCGraw-Hill.

INFOGRAFÍA

- https://lh3.googleusercontent.com/SMvmofuYcp6m3ckjnU0q7fIDh7DXhg3Sjjn8BuW4ls6qSAbWsE5v4fzTBLEOeWidUl0=w412-h220-rw
- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcRazYk1mMjMUbWpO4XC6RL6J1ZYvFils3JQYhNGRk4HyftjqzPJ&usqp=CAU
- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcQRsgyqHIuH6Yd2XwSoypbaD85C_QD8g0O7x6SX0vEXH4TS2D3V&usqp=CAU
- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcRWbISr_lQvNT7i0pd0gRWMUmukwc_R1nJzRvUAWICa6TCwxhvD&usqp=CAU
- https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html
- https://youtu.be/jpIOnLHIxrg
- https://youtu.be/tsv4KJ-9ais
- https://youtu.be/utUMbgmOm30
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_profesor/Documentacion_4D/mates/ganalitica/conicas.htm#:~:text=En%20el%20siglo%20XVI%20el,las%20variables%20x%20e%20y.
- https://www.youtube.com/watch?v=GHgHx1X4XDI
- https://www.youtube.com/watch?v=5Vgy7tdMC2k

ANEXO 1[4]

Los recursos complementarios que anexamos son de:
http://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/razones-trigonometricas-3.html

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

SOH-CAH-TOA: Una manera sencilla de recordar

SOH-CAH-TOA es un acrónimo que se usa para poder memorizar las definiciones de las razones trigonométricas más importantes: seno, coseno y tangente. La siguiente tabla explica su significado.

Acronimo	Descripcion verbal	Definicion matematicas
SOH	Seno es Opuesto sobre Hipotenusa	$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
CAH	Coseno es Adyacente sobre Hipotenusa	$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
TOA	Tangente es Opuesto sobre Adyacente	$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$

Para las otras razones trigonométricas, en vez de crear otro acrónimo, es más sencillo aprenderse el hecho de que la cosecante, secante y cotangente, son opuestos multiplicativos del seno, coseno y tangente, respectivamente. En la siguiente tabla se detalla.

Razón Trigonométrica	**Opuesto Multiplicativo**
Seno $\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	Cosecante $\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$
Coseno $\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	Secante $\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$
Tangente $\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$	Cotangente $\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$

[4] La información de los anexos fue obtenida de: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html

IDENTIDADES TRIGOMÉTRICAS

Identidades trigonométricas básicas

$$sen\theta \cdot csc\theta = 1 \rightarrow sen\theta = \frac{1}{csc\theta}, \quad csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$

$$cos\theta \cdot sec\theta = 1 \rightarrow cos\theta = \frac{1}{sec\theta}, \quad sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$$

$$tan\theta \cdot cot\theta = 1 \rightarrow tan\theta = \frac{1}{cot\theta}, \quad cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$$

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Identidades trigonométricas pitagóricas

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sen^2\theta = 1 - cos^2\theta \rightarrow sen\theta = \pm\sqrt{1 - cos^2\theta}$$

$$cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \rightarrow cos\theta = \pm\sqrt{1 - sen^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta \rightarrow tan^2\theta = sec^2\theta - 1$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \rightarrow cot^2\theta = csc^2\theta - 1$$

Identidades trigonométricas pares e impares

Funciones Pares: $cos(-\theta) = cos\theta$ $\quad$ $sec(-\theta) = sec\theta$

Funciones Impares: $sen(-\theta) = -sen\theta$ $\quad$ $csc(-\theta) = -csc\theta$ $\quad$ $tan(-\theta) = -tan\theta$ $\quad$ $cot(-\theta) = -cot\theta$

Identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta \pm sen\beta \cdot cos\alpha$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sen\alpha \cdot sen\beta$$

$$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\alpha \pm tan\beta}{1 \mp tan\alpha \cdot tan\beta}$$

Identidades trigonométricas del producto-suma

$$sen\alpha \cdot sen\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]$$

$$cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)]$$

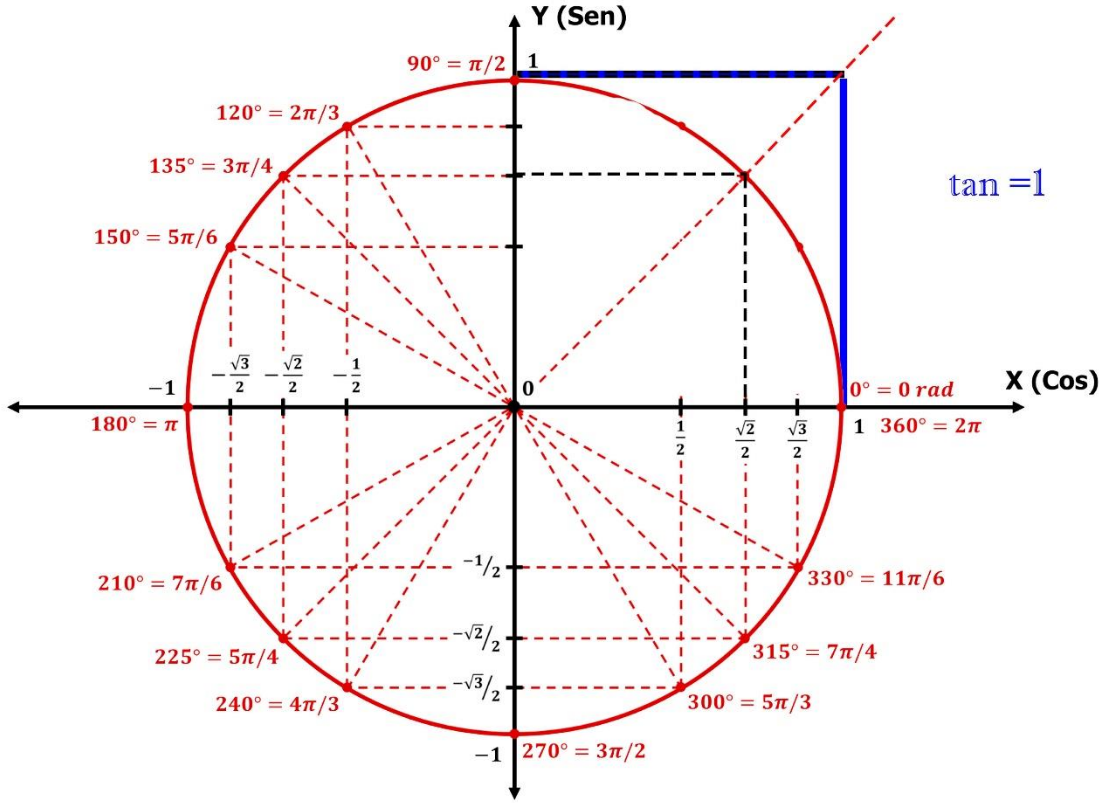
$$sen\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta)]$$

$$sen\alpha + sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2 \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$



Fórmulas para ángulos dobles

$$sen(2\theta) = 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$$

$$cos(2\theta) = \begin{cases} cos^2\theta - sen^2\theta \\ 1 - 2sen^2\theta \\ 2cos^2\theta - 1 \end{cases}$$

$$tan(2\theta) = \frac{2 \cdot tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

Fórmulas para ángulos medios

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{2}}$$

$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\theta}{2}}$$

$$tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta}} = \frac{1 - cos\theta}{sen\theta} = \frac{sen\theta}{1 + cos\theta}$$

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-resolver-las-ecuaciones-trigonometricas.html

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE
EDUCACIÓN